Alfred Recknagel: PHYSIK - Mechanik, Verlag Technik Berlin 1955

. . . .

5 Bewegung im beschleunigten Bezugssystem

In den vorhergehenden Kapiteln betrachteten wir die mechanischen Vorgänge in einem Koordinatensystem oder Bezugssystem, wie wir im folgenden sagen, das sich nicht bewegt. Bei den Vorgängen auf der Erde z. B. diente der feste Erdboden als Bezugssystem und stillschweigend wurde angenommen, daß die Erde ruht. Bei den astronomischen Problemen wurde das Koordinatensystem mit der Sonne verknüpft und diese als ruhend betrachtet. Solche ruhenden Systeme müssen nicht in allen Fällen zweckmäßig sein; unter Umständen läßt sich ein Vorgang leichter darstellen von einem Koordinatensystem aus, das sich selbst

bewegt. Die Füße eines Radfahrers z. B. beschreiben von der Erde aus gesehen eine Schlangenlinie. Der Radfahrer selbst beobachtet von seinem Standpunkt aus eine viel einfachere Bewegung: Er behauptet, daß seine Füße Kreise durchlaufen. In noch anderen Fällen ist das bewegte Bezugssystem überhaupt das naturgegebene. Das trifft im Prinzip zu für alle Vorgänge, die sich auf der Erde abspielen. Die Erde rotiert ja um ihre Achse und bildet damit selbst in Wirklichkeit kein ruhendes Bezugssystem, sondern ein bewegtes. Daher erhebt sich die Frage: Wie ist die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluß gegebener Kräfte von einem bewegten Bezugssystem aus zu beschreiben?

5.01 Das Inertialsystem

Die grundlegende Newtonsche Bewegungsgleichung der Mechanik

Masse mal Beschleunigung gleich Kraft

wurde in den vorhergehenden Abschnitten abgeleitet und angewandt in einem System, das auf dem Erdboden ruht. Es wird sich aber zeigen, daß die Drehung der Erde um ihre Achse auf die Bewegungsgesetze einwirkt. Wir beobachten also bei geeigneten Versuchsbedingungen an den bewegten Körpern Vorgänge, die ihren Ursprung in der Drehung der Erde haben. Anders ausgedrückt: Wenn wir annehmen, daß auf der rotierenden Erde die Bewegungsgleichung in Strenge gilt, dann enthalten die wirkenden Kräfte Bestandteile, die von der Erddrehung herrühren. Wir nehmen daher an, daß die Bewegungsgleichung und ihr Sonderfall, das Trägheitsgesetz, ohne derartige Bestandteile in jedem Koordinatensystem gelten, das mit dem Massenmittelpunkt des Fixsternhimmels fest verbunden ist. Ein solches System heißt Inertialsystem (vom lateinischen inertia = Trägheit; der Name soll ausdrücken, daß in dem System das Trägheitsgesetz gilt).

Jedes System, das sich gegen ein Inertialsystem gleichförmig geradlinig bewegt, ist ebenfalls ein Inertialsystem. Der Beweis wird an Hand von Bild 177 geführt. Das Inertialsystem ist durch x, y, z bezeichnet; das dagegen bewegte System ist durch Striche (x', y', z') davon unterschieden. Das bewegte System läuft mit der Geschwindigkeit u gegen das Inertialsystem. Die Koordinatenachsen werden so gelegt, daß die Richtungen der x-Achse und der x'-Achse zusammenfallen und daß diese in die Richtung der Geschwindigkeit u zeigen. Sei x_0 der Abstand der beiden Koordinatenanfangspunkte, so gilt

$$x_0 = u\,t\,. \tag{5.1}$$

Für die Koordinaten eines beliebigen Punktes Q besteht demnach der Zusammenhang

$$x' = x - x_0\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,. \tag{5.2}$$

Durch zweimalige Differentiation folgt daraus

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\,, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}\,, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}\,, \tag{5.3}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_0}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}\,. \tag{5.4}$$

Setzt man hier die Beziehung (5.1) ein, so ergibt sich

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u\,, \tag{5.5}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,. \tag{5.6}$$

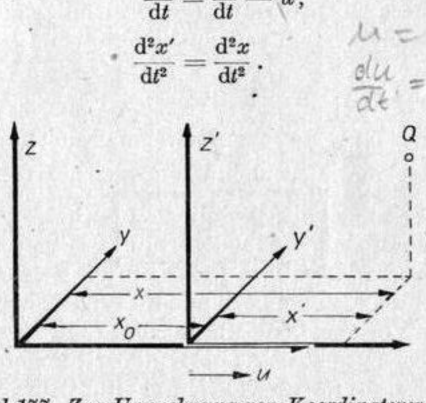

Bild 177. Zur Umrechnung von Koordinatenwerten

Zunächst ist also gezeigt: Es ist gleichgültig, ob die Beschleunigungen vom Inertialsystem oder vom gleichförmig geradlinig dagegen bewegten System aus gemessen werden; in beiden Fällen ergibt sich der gleiche Wert.

Im Punkt Q befinde sich die Masse m, auf die im Inertialsystem irgend eine Kraft $\mathfrak{P}$ mit den Komponenten P_x, P_y, P_z wirkt. Daher gelten die Bewegungsgleichungen

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = P_x\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = P_y\,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = P_z\,. \tag{5.7}$$

Setzt man hier die Beziehungen (5.6) bzw. (5.4) ein, so ergibt sich

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = P_x\,, \quad m\frac{d^2y'}{dt^2} = P_y\,, \quad m\frac{d^2z'}{dt^2} = P_z\,. \tag{5.8}$$

Im gleichförmig gegen das Inertialsystem bewegten Bezugssystem beobachtet man also Beschleunigungen der Körper, für die die Beziehung „Masse mal Beschleunigung gleich Kraft" mit dem gleichen Wert der Kraft gilt, der auch im Inertialsystem einzusetzen ist, d. h., von beiden Systemen aus wird ein Bewegungsvorgang in der gleichen Weise beschrieben.

Zwei Koordinatensysteme, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, unterscheiden sich mechanisch nicht. Ist das eine ein Inertialsystem, so gilt dies auch für das zweite.

Wir nennen dieses Gesetz das **Relativitätsprinzip der NEWTONschen Mechanik** (es verbindet Koordinatensysteme miteinander, die relativ zueinander bewegt sind). Gelegentlich läßt es sich direkt bestätigen. Vom Inneren eines gleichförmig fahrenden Schiffes aus läßt sich oft nicht unterscheiden, ob das Schiff ruht oder fährt, wenn man das Ufer nicht sehen kann. Fährt man nachts im Eisenbahnwagen, so kann man beim Aufwachen oft nicht entscheiden, ob man rückwärts oder vorwärts fährt. Das bewegte Koordinatensystem, der Eisenbahnwagen, erscheint gleichwertig der Erdoberfläche. Noch deutlicher zeigt dies der Riemen eines Rucksackes, der aus dem Gepäcknetz hängt und bei ruhiger Fahrt, ohne zu schwingen, senkrecht hängt: Die Schwerkraft wirkt in beiden Systemen in gleicher Weise.

Die Gleichung (5.8) verbindet die Beschleunigung im bewegten System mit der Kraft, die im ruhenden System wirkt. Letztere muß der bewegte Beobachter also kennen, wenn er die Gleichung (5.8) anwenden will. Genaugenommen handelt es sich sogar um die Kraft in einem gegenüber dem Massenmittelpunkt des Fixsternhimmels ruhenden System, und in einem solchen sind natürlich tatsächlich überhaupt noch keine Kräfte gemessen worden. Hier hilft nur die Annahme weiter, daß die Erde trotz ihrer Drehung für viele Probleme nicht sehr von einem Inertialsystem abweicht, daß demzufolge die auf der Erde gemessenen Kräfte hinreichend übereinstimmen mit denen, die im Inertialsystem gemessen würden, und daß im übrigen die typischen von der Erddrehung herrührenden Einflüsse auf Grund der noch folgenden Sätze berücksichtigt werden können. Handelt es sich z. B. um die Kraft einer Schraubenfeder, so wird diese durch die Federdehnung angezeigt. Man wird es als etwas Selbstverständliches ansehen, daß eine solche Längenänderung von dem bewegten und dem ruhenden Beobachter in gleicher Größe gemessen wird. Trotzdem muß hervorgehoben werden, daß es sich um eine Annahme handelt, die immer wieder an der Erfahrung zu prüfen ist. Hierauf näher einzugehen, übersteigt den Rahmen dieses Lehrganges.

5.02 Geradlinig beschleunigtes Bezugssystem

Ein Koordinatensystem, das wieder wie im vorigen Abschnitt durch Striche gekennzeichnet wird, bewegt sich beschleunigt gegen ein Inertialsystem in Richtung der x-Achse. Für einen Punkt eines bewegten Körpers werden von beiden Systemen aus unterschiedliche Beschleuni-

gungen gemessen. Wieder gilt die Beziehung (5.4):

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_0}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}\,.$$

Hier verschwindet jedoch das Glied $\frac{d^2x_0}{dt^2}$ nicht, da es ja die Beschleunigung des bewegten Systems gegen das Inertialsystem angibt. Multipliziert man (5.4) mit der Masse m und berücksichtigt die Bewegungsgleichungen (5.7) für das Inertialsystem, so ergibt sich

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = P_x - m\frac{d^2x_0}{dt^2}\,, \quad m\frac{d^2y'}{dt^2} = P_y\,, \quad m\frac{d^2z'}{dt^2} = P_z\,. \tag{5.9'}$$

Diesen Gleichungen zufolge ist nun das Produkt aus Masse und Beschleunigung nicht mehr gleich der Kraft, die im Inertialsystem wirkt. Vielmehr tritt zur x-Komponente noch ein Ausdruck

$$\boxed{P_{T,x} = -m\frac{d^2x_0}{dt^2}} \tag{5.10'}$$

hinzu, der ebenfalls die Dimension einer Kraft hat und der Beschleunigungsrichtung entgegenwirkt (wegen des Minuszeichens). Bezeichnet man in allgemeinerer Schreibweise die Beschleunigung des bewegten Koordinatensystems gegen das ruhende mit b_0, so gilt

$$\boxed{P_{T,x} = -m\,b_{0,x}} \tag{5.10''}$$

und die Gleichungen (5.9') sind zusammenzufassen zu

$$\boxed{m\frac{d^2\mathfrak{r}'}{dt^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{P}_T\,.} \tag{5.9''}$$

Wir nennen die Kraft $\mathfrak{P}$, die von den physikalischen Bedingungen der beteiligten Körper abhängt, die **eingeprägte Kraft.** Dagegen bezeichnen wir $\mathfrak{P}_T$ mit dem Betrag P_T als **Trägheitskraft,** weil sie nämlich nichts anderes berücksichtigt als die Trägheit. Dies wird klar, wenn in (5.9') die eingeprägten Kräfte verschwinden. Vermöge ihrer Trägheit macht die Masse die beschleunigte Bewegung des Koordinatensystems nicht mit. Sie bewegt sich vielmehr mit entgegengesetzt gerichteter Beschleunigung gegen das System. Der bewegte Beobachter deutet aber, von seiner Kenntnis der Newtonschen Bewegungsgleichung im ruhenden System ausgehend, eine solche Beschleunigung als Folge einer Kraftwirkung. Diese Kraft eben ist die Trägheitskraft, die, um es zu wiederholen, der Beschleunigung des Systems entgegengerichtet ist. Wir haben demnach den Satz:

Ist ein Bezugssystem gegen ein Inertialsystem geradlinig beschleunigt, so ist das im bewegten System gemessene Produkt aus Masse und Beschleunigung gleich der Summe aus eingeprägter Kraft und Trägheitskraft.

Das gleiche in anderer Form: Will man in einem geradlinig gegen ein Inertialsystem beschleunigten Bezugssystem die Gleichung „Masse mal Beschleunigung gleich Kraft" anwenden, so muß zu der auch im Inertialsystem wirkenden eingeprägten Kraft noch die Trägheitskraft hinzugefügt werden. Von Trägheitskräften wird im folgenden nur gesprochen, wenn der Vorgang von einem Bezugssystem aus betrachtet wird, das gegen ein Inertialsystem in irgendeiner Form beschleunigt ist.

Eine Reihe von Versuchen soll klären, wie der Begriff der Trägheitskraft zu verwenden ist. Zwischen zwei schwere Gewichtsstücke klemmt man ein Blatt Papier, so daß es sich nicht herausziehen läßt (Bild 178). Läßt man jedoch die Gewichte fallen, so kann das Papier, ohne zu zerreißen, herausgezogen werden. Die frei fallenden Gewichte üben keine Kräfte aufeinander aus. Das gleiche zeigt quantitativ etwas genauer der folgende Versuch. Eine Person springt von einer Bockleiter. Sie hält dabei vor sich eine Federwaage, an der ein Gewichtsstück hängt (s. auch Bild 45). Zunächst hält sie Gewicht und Waage mit beiden Händen so, daß die Feder nicht gespannt ist. Nach dem Abspringen läßt sie das Gewicht los, so daß es nur noch an der Waage hängt. Diese bleibt weiterhin entspannt, zeigt also kein Gewicht an.

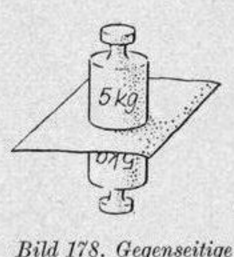

Bild 178. Gegenseitige Kraft zweier fallender Körper

Der ruhende Beobachter erklärt: Versuchsperson und Gewichtsstück fallen beide frei, also mit derselben Beschleunigung g. Außerdem war die Feder anfangs entspannt, übte also keine Kraft zwischen dem Gewicht und dem Gestell der Federwaage aus. Demnach kann sich deren gegenseitige Lage nicht ändern, d. h., die Dehnung der Feder muß unverändert immer den Anfangswert 0 zeigen.

Die Versuchsperson als mitfallender Beobachter behauptet von ihrem Standpunkt aus: Das Gewichtsstück ruht in meinem Koordinatensystem. Nach unten zieht, wie ich weiß, das Gewicht. Nach oben (in Richtung der z-Achse) wirkt die Trägheitskraft $-m \cdot \frac{d^2z_0}{dt^2} = -mg$, die das Gewicht gerade ausgleicht. An dem Gewicht wirkt insgesamt keine Kraft, die Feder muß entspannt bleiben.

Wird das Gewicht zu Anfang des Versuches nicht festgehalten, ist die Federwaage also gespannt, so zieht sie sich beim Fall schnell zu-

sammen. Jetzt muß man etwas anders schließen. Die mitfallende Versuchsperson z. B. sagt: Schwerkraft und Trägheitskraft heben sich gegenseitig auf. Die Kraft der gespannten Feder sucht diese jedoch zu verkürzen. Dabei sollte eigentlich eine Schwingung der Masse an der Feder zustande kommen. Davon sieht man jedoch wegen der Kürze der Fallzeit nur den Anfang, das Zusammenziehen der Feder.

Die Trägheitskraft hat, wie gezeigt wurde, in einem geradlinig beschleunigten System konstante Richtung und bei gleichförmiger Beschleunigung auch konstanten Betrag. Sie ist der Masse der Körper

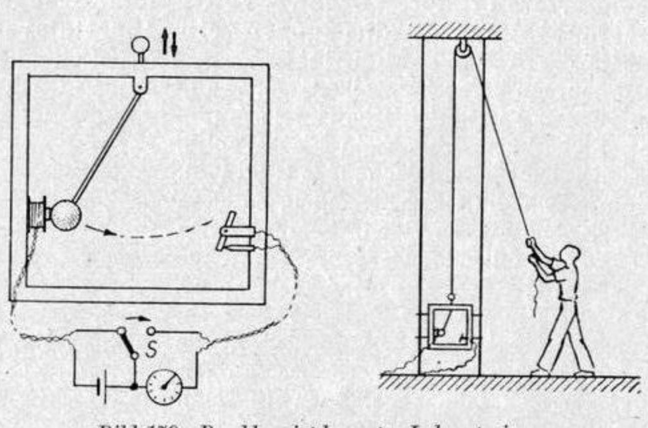

Bild 179. Beschleunigt bewegtes Laboratorium
Elektrische Schaltung schematisch

proportional, d. h., sie wirkt so wie die Schwerkraft. Alle Wirkungen, die diese verursacht, können auch durch gleichförmige Beschleunigung des Bezugssystems erreicht werden. Mit anderen Worten: Die auf Massenanziehung beruhende Schwerkraft einerseits und die Trägheitskraft im beschleunigten Bezugssystem andererseits sind einander gleichwertig. Zum Beweis dient ein kleines „Laboratorium", das beschleunigt bewegt werden kann, nämlich ein Holzrahmen, den man an Drähten auf und ab fahren kann (Bild 179). Die Beschleunigung wird durch Übergewichte erzeugt. In diesem Laboratorium wird der Einfluß der Beschleunigung auf die Pendelschwingung untersucht. In dem Rahmen hängt ein Stangenpendel, dessen halbe Schwingungsdauer gemessen wird. Das von einem Elektromagneten gehaltene Pendel wird elektrisch gelöst, indem durch den Schalter S der Magnetstromkreis geöffnet wird. Dabei schaltet man zugleich eine elektrische Uhr ein. Nach einer halben Schwingung schaltet das Pendel selbst die Uhr wieder aus. Wenn der im Laboratorium mitfahrend gedachte Beobachter von seiner Beschleu-

nigung nichts weiß, deutet er die gemessene Schwingungsdauer mit Hilfe der Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^*}{g'}}\,,$$

wo er dann g' als seine Fallbeschleunigung ansieht. Wird nach oben beschleunigt, so wirkt die Trägheitskraft nach unten, die Fallbeschleunigung erscheint größer, sie ist nämlich $g' = g + b_0$. In der Tat schwingt das Pendel schneller als im ruhenden Labor. Bewegt sich das Laboratorium beschleunigt nach unten, so zeigt die Trägheitskraft nach oben, verkleinert also die Fallbeschleunigung auf den Wert $g' = g - b_0$. Tatsächlich schwingt das Pendel langsamer.

. . . .

. . . .

5.03 Die Zentrifugalkraft

Sehr wichtig sind die Trägheitskräfte, die in rotierenden Bezugssystemen auftreten. Bei jedem umlaufenden Rad, jedem Karussell kann es zweckmäßig sein, ein Bezugssystem zu wählen, das mit dem Körper umläuft. Hier sollen nur solche Systeme untersucht werden, die um eine feste Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren. Dabei wirken Trägheitskräfte von unterschiedlichem Charakter. Zunächst soll die sogenannte **Zentrifugalkraft** behandelt werden, die stets an den Körpern auftritt, gleichgültig, ob sie im rotierenden Bezugssystem ruhen oder sich relativ zu diesem bewegen.

In Bild 182 ist als Inertialsystem die Erde benutzt; man darf dies tun, weil die Erddrehung bei diesem Versuch keinen merklichen Einfluß hat. Das drehende System ist ein Drehstuhl, dessen Gang durch schwere Gewichte möglichst gleichmäßig gemacht wird. Der Beobachter rotiert mit dem Stuhl mit. Außerhalb der senkrechten Drehachse hängt an einer Stange eine Kugel über einer Nullmarke. Beim Drehen würde die Kugel nach außen schwingen. Um dies zu verhindern, zieht sie der Beobachter mit einer Federwaage über die Nullmarke und mißt dabei gleichzeitig die Kraft, die er dazu braucht. Wieder soll nebeneinandergestellt werden, wie der Beobachter vom ruhenden System aus den Vorgang beschreibt und wie es der bewegte Beobachter tut.

Der ruhende Beobachter (Zuschauer im Hörsaal) sagt: Die Kugel bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einem Kreis. Um das zu erzwingen, ist eine Radialkraft $P_r = -m\,\omega^2\,r$ erforderlich, die vom mitfahrenden Beobachter aufgebracht und durch die Feder auf die Kugel übertragen wird.

Der bewegte Beobachter sagt: Die Kugel ruht in meinem System. Die Feder zeigt eine zur Achse des Stuhles gerichtete Kraft, die von den Untersuchungen im ruhenden System her als Radialkraft bekannt ist, also den Betrag $P_r = -m\,\omega^2\,r$ hat. Das Trägheitsgesetz (ein Körper bleibt nur dann in Ruhe, wenn die Summe aller an ihm wirkenden Kräfte verschwindet) kann nur gelten, wenn außerdem noch eine zweite Kraft radial nach außen zieht, die die Kraft des Beobachters gerade ausgleicht. Wir nennen die so eingeführte Kraft **Zentrifugalkraft** und bezeichnen sie mit P_Z. Da sie der Radialkraft gleich ist, hat sie den Betrag

$$\boxed{P_Z = m\,\omega^2\,r = m\frac{v^2}{r}\,.} \tag{5.11}$$

Die Zentrifugalkraft ist eine Trägheitskraft, die in einem rotierenden Bezugssystem eingeführt werden muß, wenn das Trägheitsgesetz gelten soll. Für Körper, die im bewegten System ruhen, verschwindet die Summe aus eingeprägter Kraft und der radial nach außen zeigenden Zentrifugalkraft.

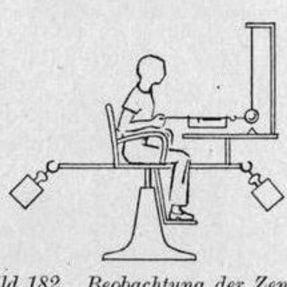

Bild 182. Beobachtung der Zentrifugalkraft

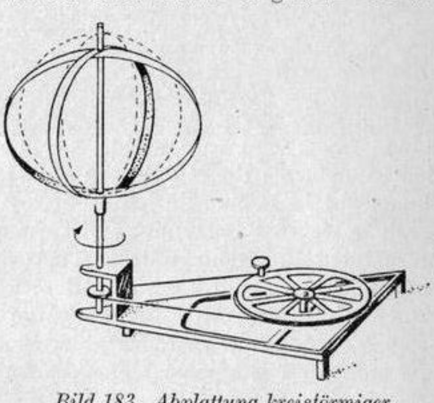

Bild 183. Abplattung kreisförmiger Metallbänder

Das Wort Zentrifugalkraft wird in der Physik in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht, die von dem Anfänger meist durcheinandergeworfen werden. Dabei ergeben sich dann völlig falsche Vorstellungen. In [2.15] war davor schon gewarnt worden. In diesem Leitfaden der Physik wird von Zentrifugalkraft nur im Zusammenhang mit rotierenden Bezugssystemen gesprochen. Der Student macht also sicher keinen Fehler, wenn er erst klar sagt, daß der Vorgang von einem rotierenden Bezugssystem aus betrachtet werden soll, bevor er das Wort Zentrifugalkraft anwendet.

. . . .