



Sonnenuhr und Kegelschnitte

DGC-Mitteilungen Nr.106, 2006:

"Jede Deklinationslinie der Sonnenuhr ist ein Stück eines echten Kegelschnittes"

Bemerkung von heute, 2008

Im ursprünglichen Aufsatz machte ich auf Fehler in einer einschlägigen Arbeit [1] aufmerksam. Die folgende Fassung ist allgemeiner und umfassender gehalten.

Zusammenfassung

Die von einem Punkt-förmigen Schattenwerfer herrührende Tagesspur auf einer Sonnenuhr kennzeichnet die Jahreszeit. Man nennt sie Datums- oder Deklinationslinie, letzteres, weil sie eine Funktion der Sonnen-Deklination δ ist. Die Linien haben die Form von Kegelschnitten. Es wird gezeigt, welche Linienarten beim Schneiden eines Kegels entstehen und von welcher Art jede einzelne Linie auf einem ebenen Zifferblatt in Abhängigkeit von der Deklination δ , der geographischen Breite ϕ und der Zifferblatt-Lage (insbesondere vertikal oder horizontal) ist.

Inhalt

1. Einleitung
2. Kegelschnitte
3. Kreiskegel aus Sonnen- und Schattenstrahlen, ebene **vertikale** Sonnenuhr
4. Für welche geographische Breite ist die vertikale Sonnenuhr geeignet?
5. Kreiskegel aus Sonnen- und Schattenstrahlen, ebene **horizontale** Sonnenuhr
6. Zusammenfassung: Welche Kegelschnitte wo und wann ?
7. Literatur (inkl. Bildnachweis)

1. Einleitung

Bei einer Sonnenuhr mit anzeigendem Schatten-Punkt ist ausser der Tages- auch die Jahreszeit (Jahres-Datum) abzulesen. Die Tagesbahn des Punktes ist nämlich täglich eine andere und hat die geometrische Form eines Kegelschnittes. Zu untersuchen ist, welche/r Kegelschnitt/e wann und wo vorlieg/t/en.

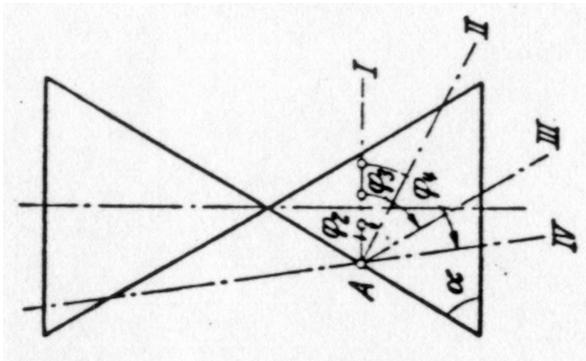


Abb.1 Kegelschnitte [2]

2. Kegelschnitte

Ich beginne ausnahmsweise mit einem mathematischen Kapitel, mit dem über Kegelschnitte und zitiere aus einem Taschenbuch für Ingenieure [2]:

"Räumlich ergeben sich die Kegelschnitte als Schnittkurven einer geraden Ebene und eines Kreiskegels ... " (Abb.1) "... Hiernach erhält man eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die schneidende Ebene zu keiner Mantellinie parallel ist (Ebene II), zu einer Mantellinie (Ebene III) oder zu zwei Mantellinien parallel ist (Ebene IV). Ist die Ebene senkrecht zur Kegellachse (Ebene I), so entsteht ein Kreis als Sonderfall von II."

3. Kreiskegel aus Sonnen- und Schattenstrahlen, ebene vertikale Sonnenuhr

Der Schatten-werfende Punkt einer Sonnenuhr ist die Spitze des Doppel-Kreiskegels von Abb.1, die Himmelsachse zwischen Himmels-Süd- und -Nordpol ist die Kegellachse. Der in Abb.2 gezeigte Kreiskegel aus Sonnen- und Schattenstrahlen ist wesentlich stumpfer als der von Abb.1. Dabei ist sogar eine spitzeste Form, nämlich die, die zur Winter-Sonnenwende ($\delta = -23,44^\circ$) gilt, gezeichnet. Die Sonnenstrahlen bilden zu dieser Zeit den linken, die Schattenstrahlen den rechten Kegel. Zur Tag/Nacht-Gleiche ($\delta = 0$) sind die Kegel zu einer Ebene, die den Himmels-Äquator enthält, degeneriert. Im Sommer-Halbjahr sind Licht- und Schatten-Kegel gegeneinander vertauscht. Die Sonne ist rechts ($\delta > 0$).

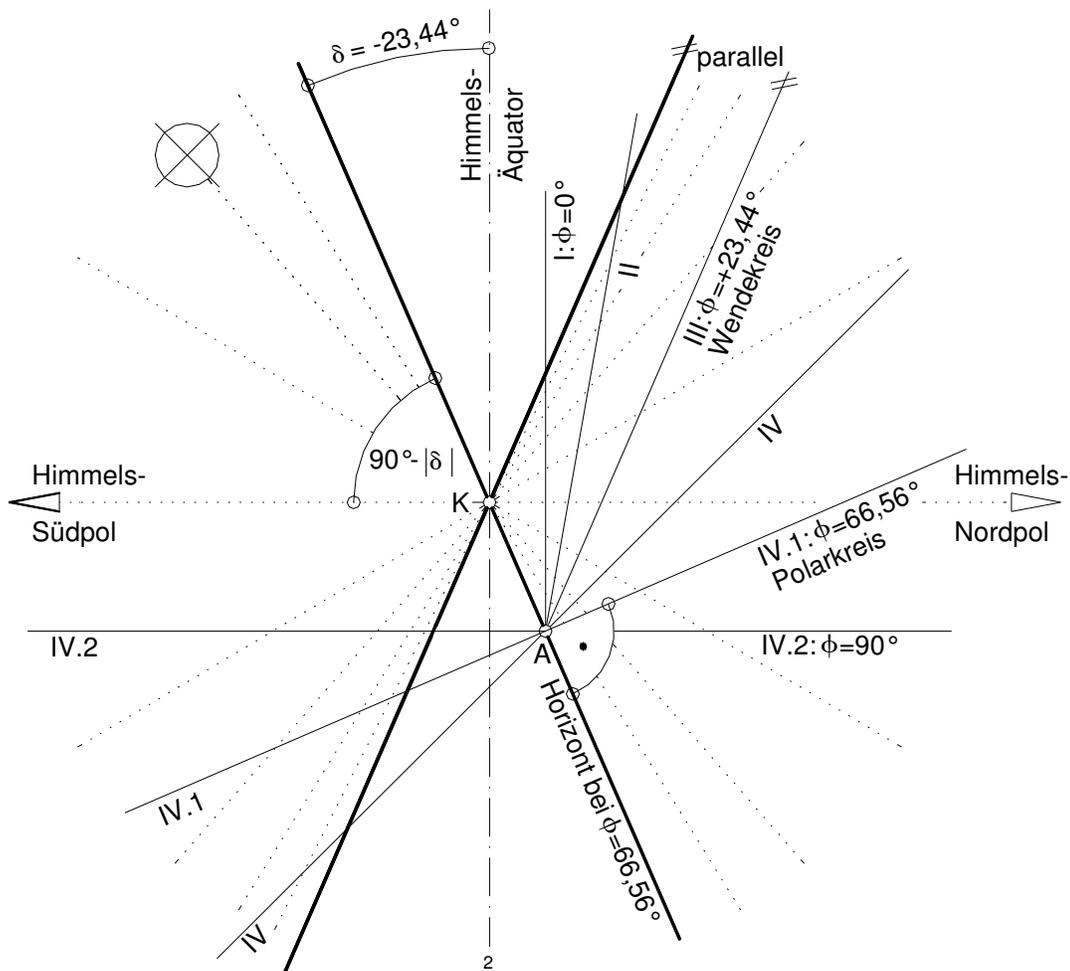


Abb.2 Kegelschnitte auf **vertikalen** Süd-Sonnenuhren
nördliche geographische Breiten ($\phi = 0$ bis 90°)

Zwischenbemerkung:
Streng genommen müsste beachtet werden, dass sich die Deklination und damit die Spitzheit der Kegel auch während eines Tages ändert. Die Änderung ist aber klein genug, dass über den Tag mit konstanter Deklination gerechnet werden kann.

Abb.2 enthält die gleichen Schnittflächen I bis IV wie Abb.1 und extra die Flächen IV.1 und IV.2. Setzt man die Flächen vertikalen Sonnenuhren-Zifferblättern auf Südwänden gleich, dann ist I eine Sonnenuhr am Äquator ($\phi = 0$), III eine am nördlichen Wendekreis ($\phi = +23,44^\circ$), IV.1 eine am Polarkreis ($\phi = +66,56^\circ$) und IV.2 eine am Nordpol ($\phi = 90^\circ$).

Am häufigsten ist Fall IV. Er gilt nördlich des Wendekreises. Also sind überall in Europa alle Deklinationslinien auf vertikalen Sonnenuhren nur Hyperbeln. (Abb.5).

Die Abbildungen 3 bis 6 enthalten die wesentlichsten Fälle von Zifferblättern vertikaler

Sonnenuhren (Süduhren). Schatten-werfender Punkt ist die Spitze eines horizontalen Stabes (Gnomon), der nach oben geklappt gezeichnet ist.

Am Äquator (Fall I, $\phi = 0$) entstehen Kreise (Abb.3), und die Südwand ist nur im Winter ($\delta < 0$) beleuchtet. Zur Tag/Nacht-Gleiche ($\delta = 0$) wird der Kreis bei Streiflicht unendlich gross.

Nördlich davon bis $\phi = +23,44^\circ$ sind es Ellipsen (Fall II), eine Parabel (III, $-\delta = \phi$) und Hyperbeln (IV): Abb.4. Zur Tag/Nacht-Gleiche ($\delta = 0$) wird die Hyperbel zur Äquinoktial-Gerade. Am Tag $+\delta = \phi$ tritt die Südwand in den Schatten.

Abb.5 zeigt das bei uns "heimische" Zifferblatt einer Süduhr.

Am Nordpol ($\phi = 90^\circ$) scheint die Sonne nur im Sommerhalbjahr, dafür ganztätig. Die Wandorientierung ist beliebig, aber jede Wand ist den halben Tag lang im Schatten (was wohl niemand ernsthaft interessieren dürfte, Abb.6).

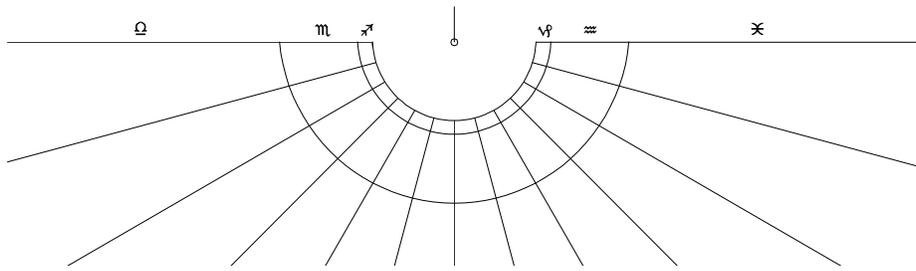


Abb.3 Deklinationslinien auf einer Süduhr am Äquator

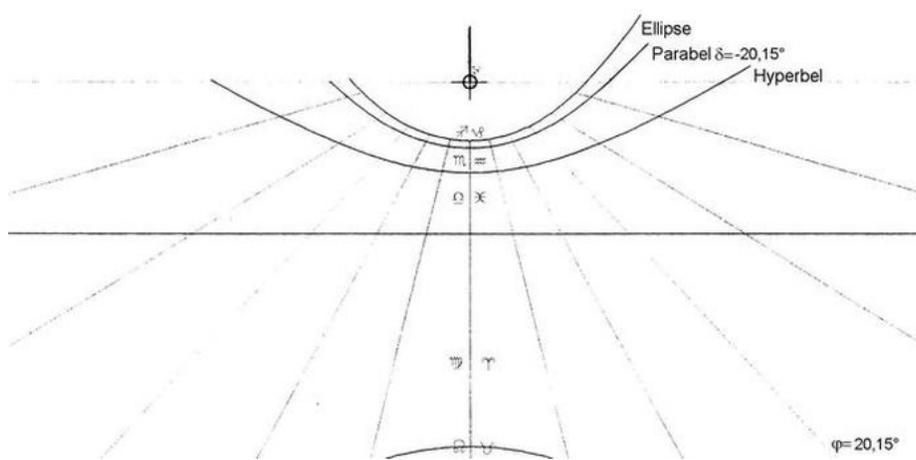


Abb.4 Deklinationslinien auf einer Süduhr bei $\phi = +20,15^\circ$

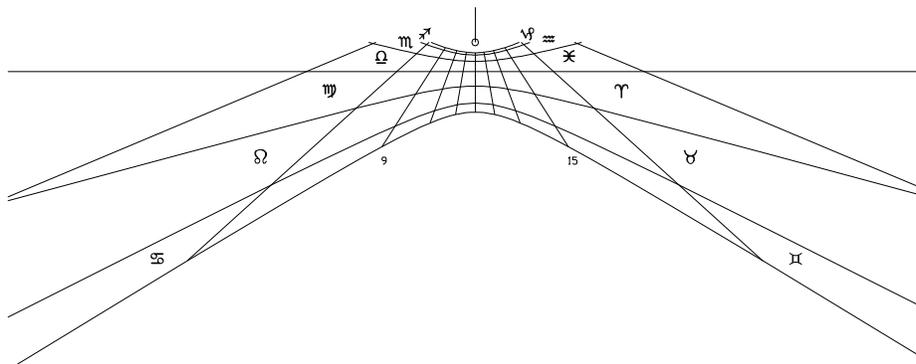


Abb.5 Deklinationslinien auf einer Süduhr bei $\phi = +50^\circ$

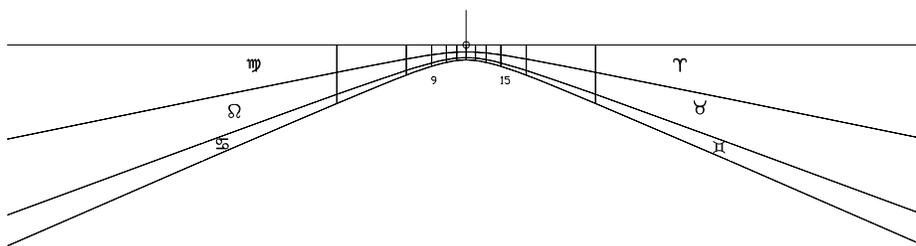


Abb.6 Deklinationslinien auf einer Wanduhr am Nordpol

4. Für welche geografische Breite ist die vertikale Sonnenuhr geeignet?

In der Nähe und innerhalb der Wendekreise sind vertikale Sonnenuhren aus folgenden Gründen wenig geeignet:

- Die Südwände sind nicht ganzjährig besonnt.
- Bevor die Besonnung verschwindet, sind die Schatten schon sehr lang, was sehr grosse Zifferblätter bei erst noch unscharfen Punkt-Schatten bedeutet

Die Zifferblätter in den Abbildungen 4 und 5 enthalten folglich nur wenig Datumslinien.

In der Nähe und jenseits der Polarkreise

- scheint die Sonne zwar kaum im Winter, dafür im Sommer zeitweise 24 Stunden lang.
- Auf einer vertikalen Sonnenuhr können aber nur maximal 12 Stunden angezeigt werden. Datumslinien gibt es nur für den Sommer.

Ausser in mittleren geographischen Breiten ist die horizontale die Standard-Sonnenuhr.



Abb.7 Vertikale **Nordwand**-Sonnenuhr in Cordoba /Arg., $\phi \approx -32^\circ$

Die von mir fotografierte Äquator-nächste vertikale Sonnenuhr befindet sich in Cordoba/Argentinien (Abb.7, $\Phi \approx -32^\circ$). Man beachte den langen Schatten. Sie ist ohne Datumslinien. Eine solche Linie, die z.B. vom Ende der Polkante aufgezeichnet würde, läge zur Zeit der Aufnahme (19.Okt.) unterhalb der Zifferblatt-Tafel.

In Abbildung 7 ist auch zu erkennen, dass die südlichen Sonnenuhren anders herum "drehen" als die, die wir bei uns zu Hause kennen.

5. Kreiskegel aus Sonnen- und Schattenstrahlen, ebene horizontale Sonnenuhr

Abb.8 ist für horizontale Sonnenuhren gezeichnet und ist fast gleich wie Abb.2. Die Himmelsachse ist umgekehrt. Die links stehende Sonne scheint zur Sommersonnenwende ($\delta = +23,44^\circ$). Die Schnittflächen gehören zu geografischen Breiten, die zu den bisherigen Werten komplementär sind ($90^\circ - \phi$):

$\phi = 0^\circ$ bei Schnitt IV.2,

$\phi = 66,56^\circ$ bei Schnitt III,

$\phi = 90^\circ$ bei Schnitt I.

Als Flächen horizontaler Sonnenuhren sind I eine Sonnenuhr am Pol ($\phi = 90^\circ$), III eine am Polarkreis ($\phi = +66,56^\circ$), IV.1 eine am Wendekreis ($\phi = +23,44^\circ$) und IV.2 eine am Äquator ($\phi = 0$).

Am häufigsten ist wie bereits schon bei den vertikalen Sonnenuhren der Fall IV. Alle horizontalen Sonnenuhren südlich des Polarkreises haben als Datumslinien nur Hyperbeln.

Was bei der vertikalen Uhr in Äquatornähe gilt, stimmt bei der horizontalen Sonnenuhr in Polnähe und umgekehrt. Einzige Besonderheit bei der horizontalen Uhr ist die nicht fehlende Besonnung in Äquatornähe, weil bei ihr die Besonnung niemals auf die Rückseite wechselt. Die den Abbildungen 3 bis 6 entsprechenden Zifferblätter kann man sich leicht vorstellen oder mit Hilfe des auch von mir verwendeten Computerprogramms [3] selbst anfertigen.

Ellipsen, eine Parabel und Hyperbeln kommen gemeinsam nur nördlich des Polarkreises vor. Ein solches Zifferblatt ist beigegefügt (Abb.9), denn auf ihm sind (im Gegensatz zu Abb.4) einige Datumslinien vollständige Ellipsen. Der (vertikale, nach Nord geklappt gezeichnete) Gnomon ist nur 1/3 so lang wie in Abb.4.

Zum Schluss noch ein Bild eines "handgemachten" horizontalen Kegelschnittes: Abb.10.

Wir befinden uns nahe beim südlichen Wendekreis ($\phi = -23,1^\circ$). Es ist Ende November, d.h. Süd-Sommer. Die Tagesspur des Schattens eines aufgehängten Steines ist viertelstündlich mit Sea-Dollars markiert. Die Hyperbel ist gegen den Äquator hin (hier nach Norden) offen, wie das bei uns im Sommer auch der Fall ist (bei uns nach Süden)..

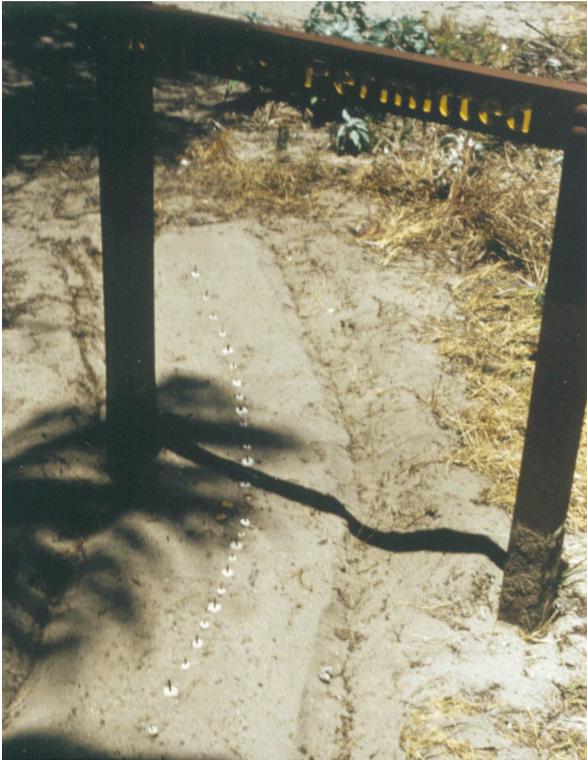


Abb.10 Tagesspur im Sand einer Südseeinsel

7. Literatur (inkl. Bildnachweis)

- [1] O.Feustel: "Jede Deklinationslinie der Sonnenuhr ein Kegelschnitt", DGC-Jahresschrift 2005
- [2] "Dubbel's Taschenbuch für den Maschinenbau: Erster Band", Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955
- [3] H.Sonderegger: "Programm Sonne", <http://web.utanet.at/sondereh/>

Februar 2008
 Siegfried Wetzel, CH 3400 Burgdorf
 s.wet@gmx.net

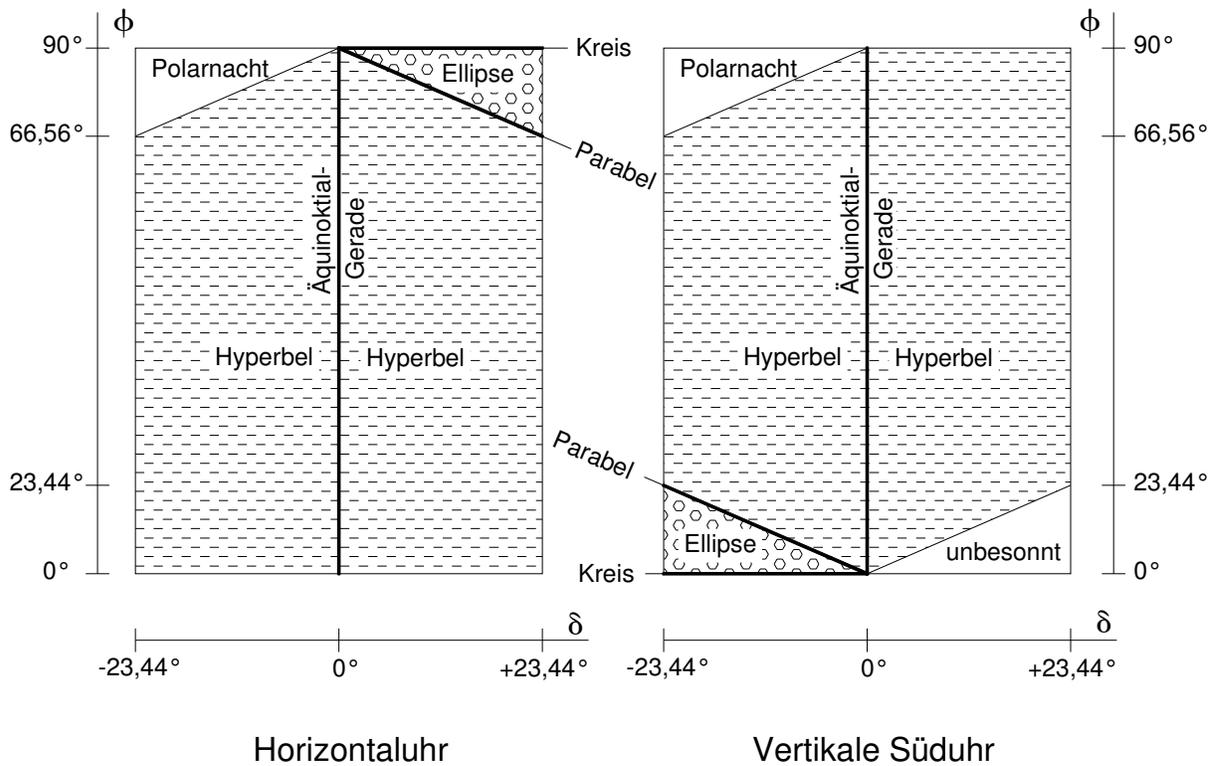


Abb.11 Art des Kegelschnittes, abhängig von Deklination δ und Breite ϕ