



## Wie entsteht ein Regenbogen? Die Geschichte seiner Erklärung seit *Descartes*

### Zusammenfassung

Versuche, die Entstehung des Regenbogens zu erklären, wurden bereits in der Antike von *Arisoteles* unternommen. Im Mittelalter gab es die ersten Experimente an einer mit Wasser gefüllten Kugel als Modell eines Regentropfens (*Dietrich von Freiberg/Sachsen*). Im 17. Jahrhundert knüpfte *René Descartes* daran an und gab eine Erklärung ab, die auch heute noch in erster Näherung gültig ist. Sie bezog sich allerdings nur auf die Entstehung eines am Himmel sichtbaren hellen Bogens. Dessen Farbigekeit blieb vorläufig noch ein Rätsel, das aber schon bald von *Newton* prinzipiell gelöst wurde. Die uns heute bekannte Erklärung aller am Himmel sichtbarer farbiger Bögen einschließlich der sogenannten "überzähligen" Regenbögen wurde im 19. Jahrhundert gefunden, als das alte Wellenmodell von *Huygens* (17. Jahrhundert) endlich auf die Ausbreitung

des Lichts angewendet wurde. Parallel zur physikalischen Beschreibung erfolgte in gegenseitiger Befruchtung ein intensiver Fortschritt bei der Erarbeitung entsprechender mathematischer Methoden durch *Airy* (30er Jahre des 19. Jahrhunderts) und *Mie* (Beginn des 20. Jahrhunderts). Die wissenschaftliche Behandlung des Regenbogens half aber nicht nur, die Natur des Lichts sondern auch die gegenseitige Beeinflussung kleinster bewegter Teile der Materie - deren sogenannte "Regenbogenstreuung" - zu verstehen.

*Descartes* stellte seine die Moderne revolutionierende naturwissenschaftlich-philosophische Methode (*la Méthode*) auch am Beispiel des Regenbogens dar. Schließlich gilt die Behandlung des Regenbogens als Beispiel eines *halb-klassischen* Verfahrens, das die Brücke zwischen der Klassik *Newtons* und der Quantenmechanik schlägt.



**Abb.1** Regenbogen-Garnitur: Hauptregenbogen mit inneren "überzähligen" Regenbögen und äußerem Nebenregenbogen, [11]

# Inhalt

1. Einleitung
2. Entstehung eines farblosen Regenbogens
3. Entstehung der Regenbogen-Farben
4. Entstehung des Nebenregenbogens
5. Entstehung der "überzähligen" Regenbögen
6. Der Regenbogen der Mathematiker
7. Der Regenbogen der Wissenschaftler
  - 7.1 Descartes: Philosoph, Naturwissenschaftler und Mathematiker
  - 7.2 Die Regenbogen-Streuung der Physiker
  - 7.3 Halbklassische Physik
8. Literatur (inklusive Bildnachweise)
9. Anmerkungen

## 1. Einleitung

*Descartes* (1594-1650) lieferte die älteste, mehrheitlich auch heute gültige Beschreibung des Regenbogens. Seine Erklärung gilt aber nur für die Position des Regenbogens am Himmel und für seine Kreisförmigkeit. Wie das Auffallendste am Regenbogen - nämlich seine Farben - entstehen, hat erst *Newton* (1642-1727) prinzipiell angegeben.

Der Grund für die innere Verbreiterung des Regenbogens in Form schwacher "überzähliger" Bögen wurde hingegen erst erkannt, als außer der bisherigen Strahlenoptik auch die Wellenoptik beigezogen wurde. Als bedeutende und allgemein befriedigende wellenoptische Untersuchungen gelten die Arbeiten von *Potter*, *Airy* und *Miller*, die diese in der Mitte des 19. Jahrhunderts durchführten.

Dabei spielt die Grösse der Tropfen (Durchmesser) keine Rolle. *Descartes* verfolgte akribisch eine grosse Zahl von Sonnenstrahlen auf ihrem Weg durch einen Tropfen. Für die Brechung wendete er das von *Snelius* einige Jahre vorher formulierte Gesetz an. Dass die Regenbogenfarben auch eine Folge der Dispersion, nämlich der Wellenlängen-abhängigen Brechung sind, war ihm nicht bekannt. Seine diffuse Vorstellung, wie die Farben in den Tropfen entstehen, erwies sich später als untauglich. Er verwendete für das gesamte Sonnenlicht einen einzigen Brechungsindex, den Wert  $n=1,33$  ( $=4/3$ ).

*Descartes* beschäftigte sich zuerst mit dem Hauptregenbogen, beachtete nur die einmalige Reflexion an der Tropfenrückseite und den folgenden Austritt der Strahlen etwa wieder in Richtung zur Sonne (Abb.2). Es erwies sich, dass aussermittige Strahlen zunächst mehr und mehr seitlich gestreut werden, die Umlenkung aber  $138,5^\circ$  ( $180^\circ$  Umlenkung heißt in sich

selbst zurück geworfen) nicht unterschreitet. Die weiter am Rand des Tropfen eintretenden Strahlen werden wieder weniger gestreut. *Descartes* näherte sich dem Grenzwert, indem er die Dichte der untersuchten Strahlen in seiner Nähe verzehnfachte. Gleich wichtig war die Erkenntnis, dass das meiste Licht (die meisten Strahlen) in der Nähe des Grenzwinkels konzentriert ist.

Der mitunter zusätzlich erkennbare schwächere Nebenregenbogen ist gleich wie der Hauptregenbogen erklärbar. Es ist lediglich zu beachten, dass das Licht in diesem Fall 2 mal, anstatt nur 1 mal in den einzelnen Regentropfen reflektiert wird, und dass sich dabei die Reihenfolge der Farben umkehrt.

## 2. Entstehung eines farblosen Regenbogens

Man kann für die Regentropfen die reine Kugelform annehmen. Dem entsprachen bereits die ersten bekannten Regenbogenexperimente, die *Dietrich von Freiberg* (13. und 14. Jahrhundert, [1, ab S.110]) und *De Dominis* (1610) mit Hilfe einer mit Wasser gefüllten Glaskugel vornahmen. *Descartes* wiederholte diese Versuche, war darüber hinaus aber der Erste, der den Regenbogen geometrisch, das heißt mit strahlenoptischem Modell konstruierte [1, ab S.200]).

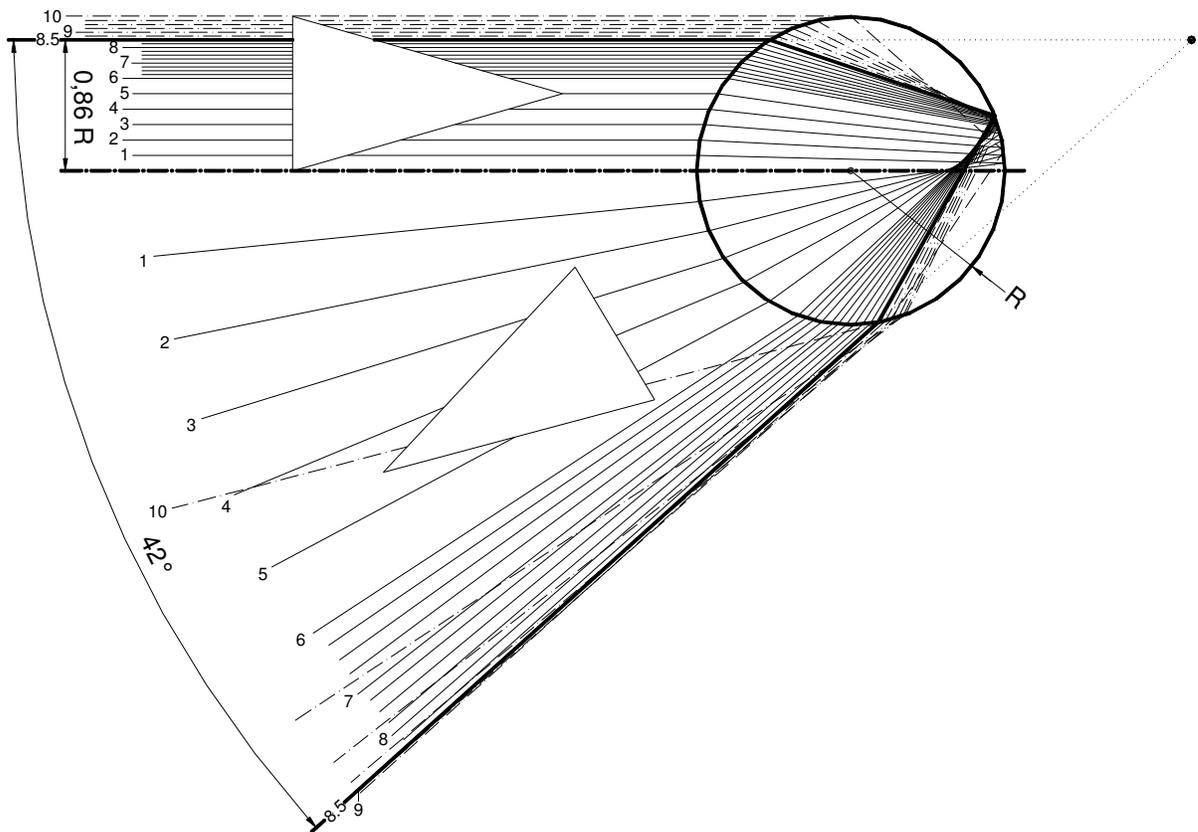
Dabei spielt die Grösse der Tropfen (Durchmesser) keine Rolle. *Descartes* verfolgte akribisch eine grosse Zahl von Sonnenstrahlen auf ihrem Weg durch einen Tropfen. Für die Brechung wendete er das von *Snelius* einige Jahre vorher formulierte Gesetz an. Dass die Regenbogenfarben auch eine Folge der Dispersion, nämlich der Wellenlängen-abhängigen Brechung sind, war ihm nicht bekannt. Seine diffuse Vorstellung, wie die Farben in den Tropfen entstehen, erwies sich später als untauglich. Er verwendete für das gesamte Sonnenlicht einen

einigen Brechungsindex, den Wert  $n=1,33$  ( $=4/3$ ).

*Descartes* beschäftigte sich zuerst mit dem Hauptregenbogen, beachtete nur die einmalige Reflexion an der Tropfenrückseite und den folgenden Austritt der Strahlen etwa wieder in Richtung zur Sonne (Abb.2). Es erwies sich, dass außermittige Strahlen zunächst mehr und mehr seitlich gestreut werden, die Umlenkung aber  $138,5^\circ$  ( $180^\circ$  Umlenkung heißt in sich selbst zurück geworfen) nicht unterschreitet. Die weiter am Rand des Tropfen eintretenden Strahlen werden wieder weniger gestreut. *Descartes* näherte sich dem Grenzwert, indem er die Dichte der untersuchten Strahlen in seiner

Nähe verzehnfachte. Gleich wichtig war die Erkenntnis, dass das meiste Licht (die meisten Strahlen) in der Nähe des Grenzwinkels konzentriert ist.

Jeder Regentropfen wirft einen Teil des Sonnen-Lichtes als Kegel-förmigen Spot zurück (Abb.3a). Die Grundhelligkeit des Regen-Himmels stammt zunächst vom Licht, das von der Vorderseite der Tropfen diffus reflektiert wird. Ihm werden die Spot-Lichter addiert. Da das meiste Licht in ihren Mänteln konzentriert ist, sorgen diese Kegel-förmigen Spot-Lichter für eine deutliche örtliche Aufhellung des Himmels, die als Regenbogen zu erkennen ist.



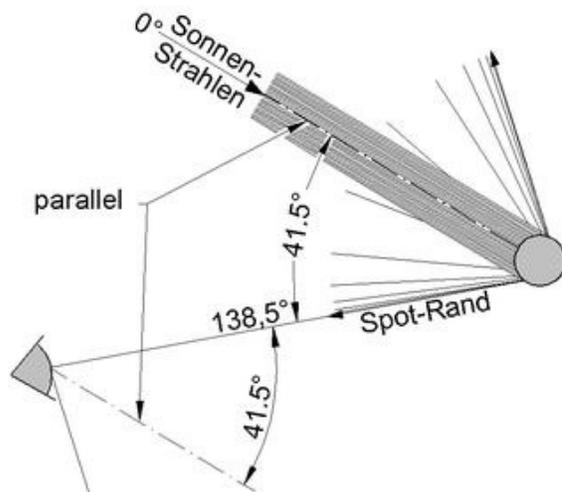
**Abb.2** Strahlengang nach *Descartes* in einem Wassertropfen, monochromatisch, vgl. [10, S.422] untere Hälfte der einfallenden Strahlen ist weggelassen, Anmerkung 1

Der Kegelwinkel der kleinen Spot-Lichter ist etwa 2 mal  $41,5^\circ$  ( $41,5^\circ = 180^\circ - 138,5^\circ$ ) groß. Der Regenbogen erscheint einem Beobachter als Teil eines Kreises unter einem Seh-Winkel von ebenfalls 2 mal  $41,5^\circ$  (Abb.3a). Der Beobachter sieht einen hellen Bogen, der aber nur aus je einem Strahl unzählbar vieler Spots zusammengesetzt ist (s. a. Abb.6). Jeder Einzel-Strahl ist wiederum nur einer von vielen, die den Spot-Mantel ihres Tropfens bilden.

Im Inneren des Regenbogen-Kreises wird dem Himmel das schwache Licht aus dem Inneren der Spot-Lichter zusätzlich zur Grundhelligkeit beigefügt. Diese schwache Aufhellung wird im Vergleich zum Himmel ausserhalb des Regenbogen-Kreises bemerkt. Der Beobachter kann nämlich nicht ins Innere der sich aussen befindenden Spot-Lichter schauen.

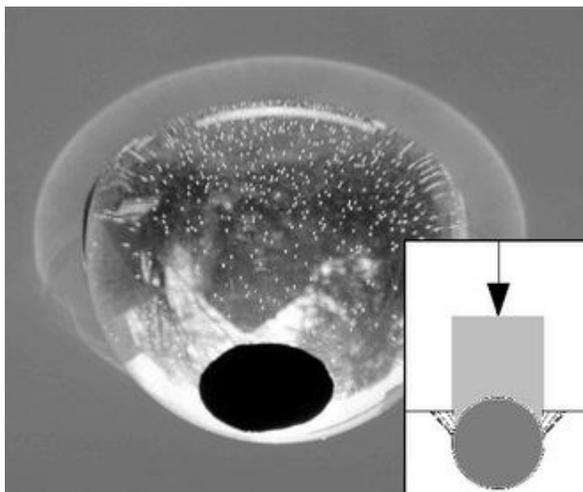
Die Konzentration des Lichtes (Licht-Verstärkg.) in den Spot-Mänteln ermittelte *Descartes* mit einer relativ groben Methode. Er unterteilte die

Ablenkung in viele kleine Intervalle und stelle dann fest, aus welchem Ring des einfallenden Bündels das Licht eines Intervalls stammt. Die Intensität in jedem Intervall ist der zugehörigen Ringfläche proportional.



**Abb.3a** Nur der unterste Licht-Strahl aus einem Regentropfen erreicht den Beobachter und ist Mantellinie sowohl des Kegel-förmigen Spots (schematisch gezeichnet) als auch des Regenbogen-Kegels, in dessen Spitze sich der Beobachter befindet.

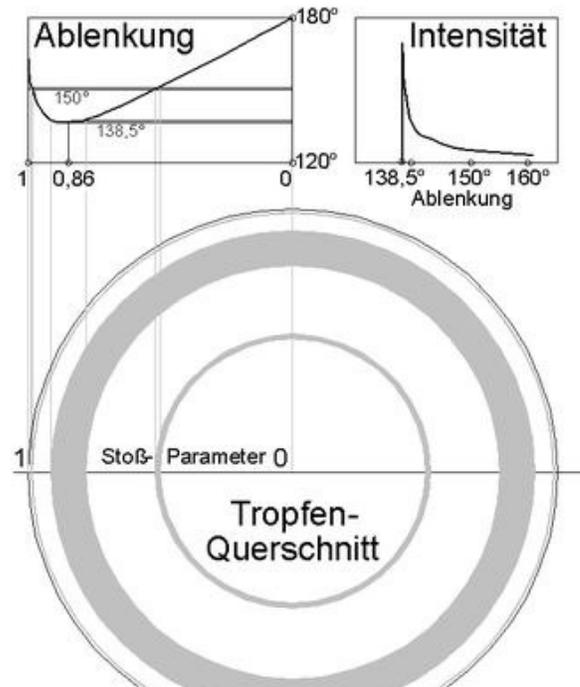
Abbildung 4 zeigt, dass das Licht im Grenzwinkelintervall  $139,5^\circ$  bis  $138,5^\circ$  aus einem sehr breiten Ring stammt. Andererseits stammt das Licht von  $151^\circ$  bis  $150^\circ$  Ablenkung aus zwei sehr schmalen Ringen beidseits des breiten Rings mit mittlerem Stoß-Parameter 0,86 (Stoßparameter = rel. Tropfen-Radius =  $0 \dots 1$ ).



**Abb.3b** Heller Rand des aus einer Wassergläserkugel tretenden Kegelförmigen Spots, monochromatisch [eigenes Experiment]

### 3. Entstehung der Regenbogen-Farben

Das Regenbogen-Modell von *Descartes* erfährt bei Beachtung der von *Newton* beschriebenen Wellenlängen-abhängigen Brechung des Lichts nur eine einfache Änderung, mit der es aber in der Lage ist, die faszinierende Farbigkeit des Regenbogens zusätzlich zu erklären.

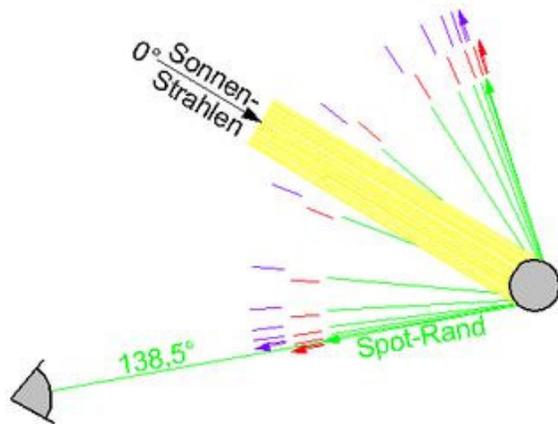


**Abb.4** Licht-Verstärkung im Spot-Mantel nach *Descartes*, [9]

Der Brechungsindex der verschiedenen Wellenlängen variiert leicht um den Wert 1,33 (Wasser). Anstatt eines einzigen Kegel-förmigen Spots gibt es für jede Spektralfarbe des Sonnenlichts einen Spot mit je einem anderen Kegelwinkel (Abb.5a). Alle Kegel stecken ineinander (haben annähernd die gleiche Spitze). Der grösste Kegel ist der rote. Sein Mantel ist von den anderen Kegeln nicht überlagert, zu Rot wird keine andere Farbe addiert. Der nächst kleinere ist orange. Im Bereich seines Mantels hat der rote Kegel nur wenig Licht, so dass Orange wenig verwaschen wird. Beim innersten Kegel - dem violetten - werden im Mantelbereich alle schwachen anderen Farben überlagert. Violett ist am stärksten verwaschen, ist aber noch dominant. Im Inneren der Kegel addieren sich alle gleich schwache Farben zu schwachem Weiß.

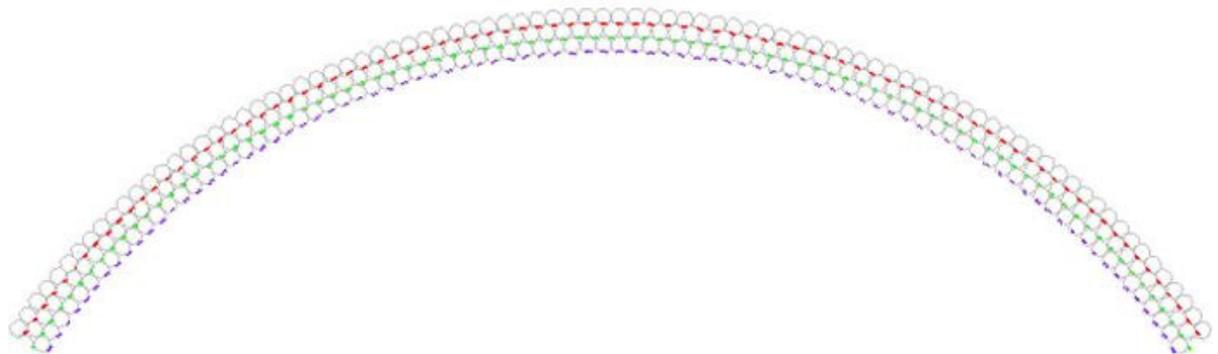
Das schwache Weiß erhellt den Himmel im Inneren des Regenbogen-Kreises, wie oben bereits beschrieben ist. Aus dem bisher behandelten fiktiven unbunten "Regenbogen" wird der

bekannte farbige Regenbogen. Der Kegelwinkel der Spots bzw. der Seh-Winkel des Regenbogens hat für die Farbe Violett den Wert 2 mal  $40,6^\circ$ , für Rot den Wert 2 mal  $42,4^\circ$  (*Descartes* gab einheitlich 2 mal  $41,5^\circ$  an).



**Abb.5a** Farbige Version von Abb.3a: Nur ein farbiger Licht-Strahl pro Regentropfen erreicht den Beobachter, jeder anders-farbig empfangene Strahl stammt von einem sich momentan höher oder tiefer befindenden Tropfen.

Der Regenbogen in Abbildung 6 enthält in jeder Bogenreihe in Wirklichkeit etwa zehn- bis hundert-tausend (abhängig vom Abstand) mal mehr entsprechend kleinere Tropfen. Das Bild ist

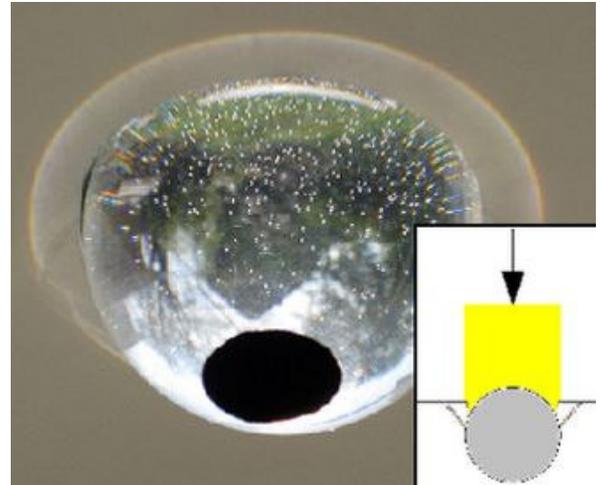


**Abb.6** Regenbogen aus drei Hauptfarben, schematisch gebildet aus je einem einzigen Lichtstrahl, je aus einem von vielen Regentropfen stammend

#### 4. Entstehung des (ersten) Nebenregenbogens

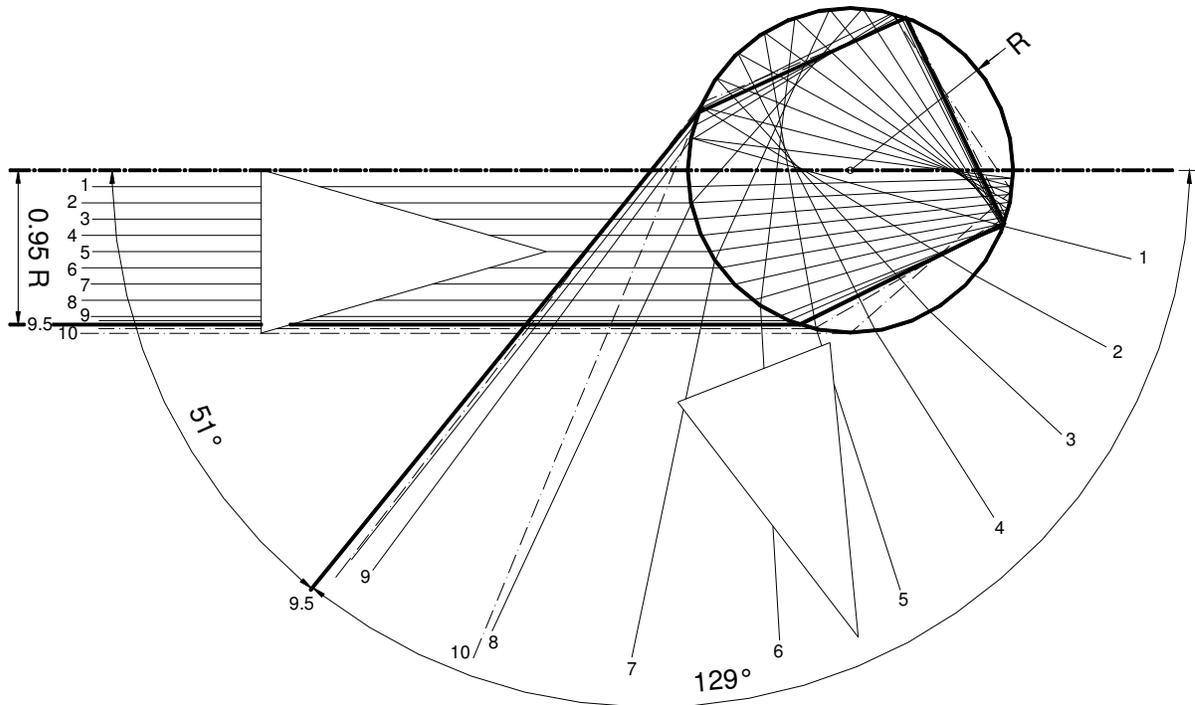
*Descartes* konstruierte auch einen farblosen Nebenregenbogen. Beim Hauptregenbogen wird derjenige Teil des Sonnenlichtes gesehen, der die Tropfen nach 1-maliger innerer Reflektion verlässt. Der andere Teil des Lichtes wird erneut reflektiert und verlässt - wiederum nur zum Teil - an einer anderen Stelle die Tropfen.

eine Momentaufnahme, denn die Tropfen fallen. Sie sind auch in keiner Weise regelmäßig zueinander angeordnet; im Großen wird dennoch eine stehende und bogenförmige Lichterscheinung gesehen, die zudem geschlossen farbig, brillant und weniger breit ist (vgl. Abb.1).

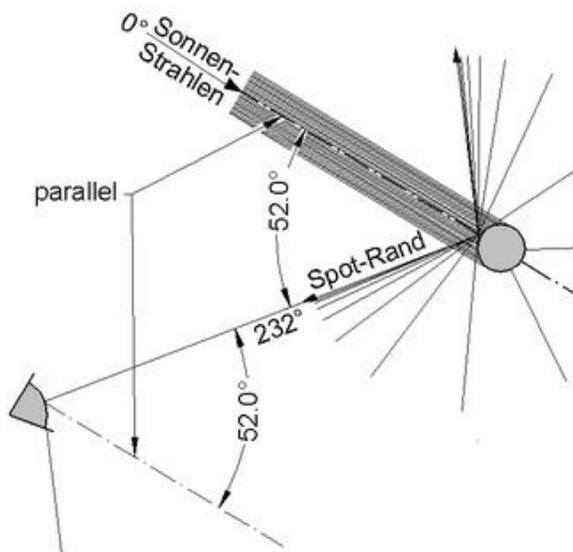


**Abb.5b** Farbige Version von Abb.3b: Farbiger Rand des aus einer Wasser-gefüllten Glaskugel tretenden Kegel-förmigen Spots [eigenes Experiment]

Mit diesem Licht wird ein erster Nebenregenbogen sichtbar. Weil das in den Tropfen verbleibende Licht nach jeder Reflektion schwächer wird, ist der erste Nebenregenbogen der einzige, der von einem Beobachter identifiziert werden kann (Anmerkung 2). Der Hintergrund der Regenwolke muss dafür besonders dunkel sein.

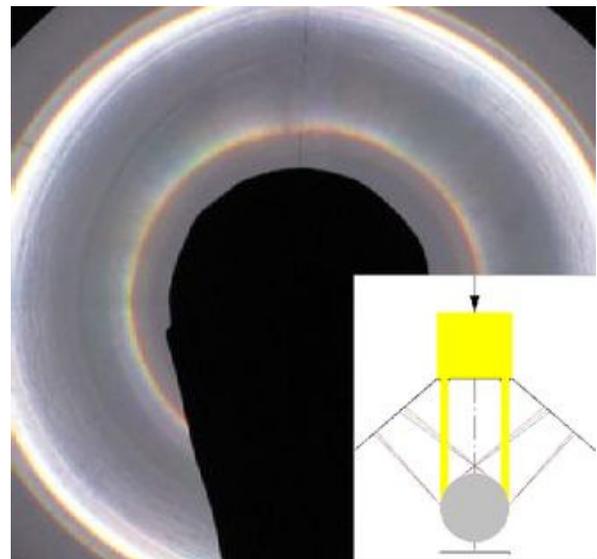


**Abb.7** Strahlengang nach *Descartes* in einem Wassertropfen beim Nebenregenbogen nach 2-maliger innerer Reflexion, monochromatisch, vgl [10, S.422]  
 obere Hälfte der einfallenden Strahlen ist weggelassen, Anmerkung 1



**Abb.8a** Nebenregenbogen: nur der unterste Licht-Strahl aus einem Regentropfen erreicht den Beobachter und ist Mantellinie sowohl des Kegel-förmigen Spots (schematisch gezeichnet) als auch des Regenbogen-Kegels, in dessen Spitze sich der Beobachter befindet.

Der mittlere Strahl verlässt den Tropfen mit  $360^\circ$  Umlenkung nach hinten. Die seitlich in den Tropfen eintretenden Strahlen werden weiter als beim Hauptregenbogen gestreut. Die Ablenkung sinkt nach *Descartes* bis auf  $232^\circ$



**Abb.8b** Nebenregenbogen: Farbiger Rand des aus einer Wasser-gefüllten Glaskugel tretenden Kegel-förmigen Spots, (vgl. Abb.5b) [eigenes Experiment]  
 außen: 2 Hauptregenbogen (Verdopplung wegen endlicher Wanddicke der Kugel)

(Violett:  $233,6^\circ$ , Rot:  $230,3^\circ$ ) und vergrößert sich dann wieder. An diesem Grenzwinkel ist die Intensität des austretenden Lichts auch am höchsten. Es sind mit der Sonne nach hinten strahlende Weitwinkel-Spots entstanden. Ihre

Kegelwinkel sind mit 2 mal  $128^\circ$  (*Descartes*:  $128^\circ = 360^\circ - 232^\circ$ ) übergroß, was aber ermöglicht, dass das in den Kegel-Mänteln konzentrierte Licht den auf der Sonnenseite postierten Beobachter erreichen kann. Der zu 2 mal  $180^\circ$  komplementäre Spotwinkel bzw. der Seh-Winkel des Nebenregenbogens hat bei *Descartes* den Wert 2 mal  $52^\circ$  ( $52^\circ = 180^\circ - 128^\circ$ ). Der Nebenregenbogen wird höher als der Hauptregenbogen (Sehwinkel 2 mal  $41,5^\circ$ ) gesehen. Die Reihenfolge der Farben ist wegen der umgekehrten Strahlrichtung der Spots im Vergleich zum Hauptregenbogen vertauscht. Die Seh-Winkel-Differenz ist wegen des längeren Lichtwegs im Tropfen grösser: 2 mal  $3,3^\circ$  (Hauptregenbogen: 2 mal  $1,8^\circ$ ).

Beim Nebenregenbogen addieren sich die Farben im Inneren der Spot-Lichter ebenfalls zu schwachem Weiß. Es ist nochmals schwächer als beim Hauptregenbogen und fällt ausserhalb des Nebenregenbogen-Kreises z.T. nach vorn, im wesentlichen aber nach hinten in die Regenwolke hinein. Aus dem Kreis-Ring zwischen den beiden Bögen erreicht den Beobachter kein Spot-Licht von den Tropfen. Dieser Bereich heißt Alexanders dunkles Band, weil der Grieche *Alexander von Aphrodisias* an der Wende vom 2. zum 3. Jahrhundert diese relative Dunkelheit schon beschrieben hat (ohne dass er eine Erklärung dafür angeben konnte) [1, S.64].

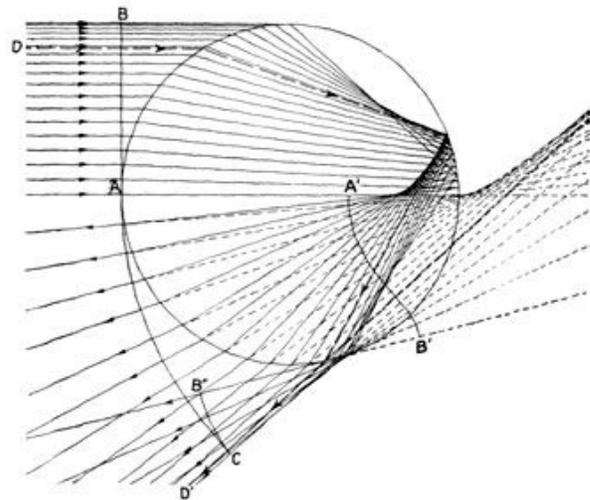
## 5. Entstehung der "überzähligen" Regenbögen

Die Erklärung bezieht sich auf den Hauptregenbogen und die ihn begleitenden "überzähligen" Regenbögen.

Die Regenbögen werden bei genauem Hinsehen und bei dunklem Himmel auf der violetten Seite von schmalen, sogenannten "überzähligen" Regenbögen begleitet (s.Abb.1). Ihre Ursache wurde erst im 19. Jahrhunderts erkannt, als man die etwa 1650 von *Huygens* begründete, 1802/03 von *T. Young* zum Durchbruch verholfene Wellenoptik auf den Regenbogen anwendete. Ein besseres, nämlich ein Wellenoptisches Modell für die Licht-Verstärkung in den Kegel-Mänteln der Tropfen-Spots ermöglichte nicht nur die Erklärung der "überzähligen" Regenbögen, sondern wirkte sich auch auf die Deutung der "ordentlichen" Bögen (Haupt- und Nebenregenbogen) aus.

Seite von schmalen, sogenannten "überzähligen" Regenbögen begleitet (s.Abb.1). Ihre Ursache wurde erst im 19. Jahrhundert erkannt, als man die etwa 1650 von

*Huygens* begründete, 1802/03 von *T. Young* zum Durchbruch verholfene Wellenoptik auf den Regenbogen anwendete. Ein besseres, nämlich ein Wellenoptisches Modell für die Licht-Verstärkung in den Kegel-Mänteln der Tropfen-Spots ermöglichte nicht nur die Erklärung der "überzähligen" Regenbögen, sondern wirkte sich auch auf die Deutung der "ordentlichen" Bögen (Haupt- und Nebenregenbogen) aus.

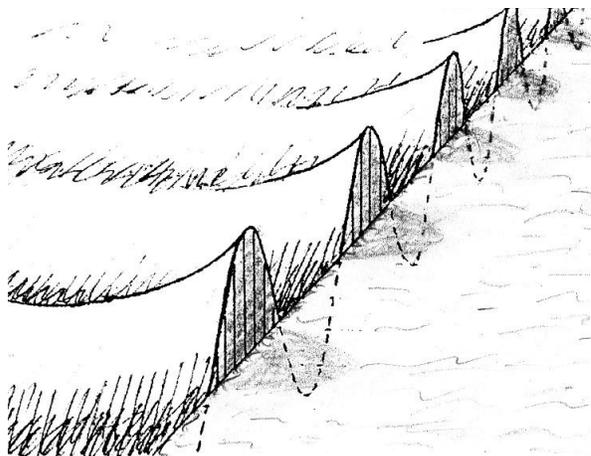


**Abb.9** (Vgl. auch Abb.13) Ein doppelt gekrümmter Wellenzug (A'-B') verlässt den Regentropfen; der Beobachter nimmt das von ihm verursachte Interferenzmuster wahr. [3, Fig.174, S.481]

Dass die gebündelt aus dem Tropfen tretenden Wellenstücke untereinander in ihrer Phase infolge ihres unterschiedlich langen Wegeanteils im Tropfen verschoben sind, erkannte schon *T. Young*, wurde aber erst von *R. Potter* (1799-1886, Anmerkung 3) intensiv untersucht. Er folgerte, dass die "überzähligen" Regenbögen Bestandteile des eigentlichen Regenbogens sind.

*Potter* stützte sich auf die von *Airy* (1801-1892, Anmerkung 4) für die Behandlung des Regenbogens erarbeitete quantitative Methode (1836). Das in *Potters* 1838 veröffentlichter Arbeit enthaltene Diagramm (Abb.10b) zeigt anstatt der von *Descartes* angegebenen monoton abnehmenden (Abb.10a) eine ausschwingende Intensität, die bereits in den Zwischenräumen zu null wird. In ihnen haben sich die in gemeinsame Ablenkrichtung gehenden Wellenstücke gegenseitig ausgelöscht. Den eigentlichen Regenbogen macht der erste, relativ hohe Berg aus. Er hat sein Maximum bereits etwas vor dem *Descartes*'schen Grenzwinkel, endet ande-

rerseits etwas dahinter. Die niedrigeren Intensitäts-Berge werden als "überzählige" Regenbögen gesehen. In der Abbildung ist auch eine von *Young* angegebene Intensitätskurve enthalten, die zwar gewellt ist, sich aber noch asymptotisch dem *Descartes'schen* Grenzwinkel nähert. Abb.10a zeigt die nicht mögliche Übertragung der von *Descartes* angenommenen Intensitätsverteilung auf Wellen, beispielsweise auf Wasserwellen.

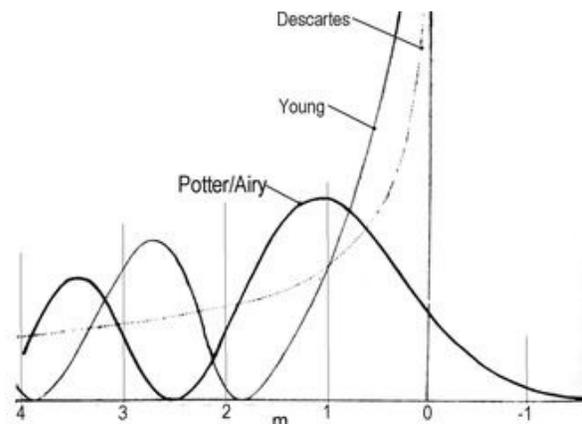


**Abb.10a** Die von *Descartes* angenommene Intensitätsverteilung ist auf Wellen nicht übertragbar: z.B. ist ein scharfer Übergang zwischen einem welligen und einem ruhigen Teil einer Wasseroberfläche - wie gezeichnet - nicht möglich. [12]

Im Interferenzmuster der verschiedenen Farben hat nur jeweils der erste Berg seinen eigenen Platz. Die kleineren Berge überlagern sich, wobei durch additive Mischung neue Farben entstehen können. Dass die erhaltenen Muster auch von der Tropfen-Grösse abhängen, erklärt, warum nicht alle Regenbögen gleich aussehen. Bei Verkleinerung der Tropfen-Durchmesser werden die Muster weiter. Das führt dazu, dass die Farbe der "überzähligen" Regenbögen variiert, aber auch dazu, dass der eigentliche Regenbogen breiter und verwischener wird. Bei sehr kleinen Tropfen (Nebel) mutiert der Regenbogen zu einem weißen Band, weil die Intensitäts-Muster der Farben gleiche Geometrie angenommen haben, was in der Addition Weiß ergibt (Abb.11).

*W.H. Miller* (1801-1880) war der erste, der in entsprechenden Experimenten eine grosse Zahl von "überzähligen" Regenbögen nicht nur sichtbar machte, sondern diese auch vermaß.

Er konnte damit die theoretischen Arbeiten von *Potter* und *Airy* und die Regenbogen-Beobachtungen umfassend bestätigen.



**Abb.10b** Die von *Potter* angegebene Licht-Intensität in der Umgebung des *Descartes*-Grenzwinkels, schematisch (Skalierung der Abszisse gilt nur für Rechnung nach der *Airy*-Methode, Anmerkung 4). [1, S.303]

Seit etwa 1865 wird Licht als elektromagnetische Welle aufgefasst und neben anderen elektromagnetischen Wechselwirkungen mit Hilfe der von *James Clerk Maxwell* dafür formulierten Gleichungen

dargestellt. *Gustav Mie* hat 1908 die Streuung elektromagnetischer Wellen an sphärischen Objekten beschrieben. Die einfallende ebene Welle wird in "Partialwellen" (s.u.) zerlegt. Für jede Partialwelle wird der Weg innerhalb und außerhalb der streuenden Kugel untersucht, anschließend werden die Anteile der Partialwellen im Beobachtungspunkt addiert. Für die Verhältnisse beim Regenbogen sind einige tausend Partialwellen, von denen jede einzelne bereits ein langer Ausdruck ist, nötig. Die Lösung durch *Mie* ist exakt, während die durch *Airy* zum Beispiel auf Annahmen (Verteilung der Lichtintensität in der gekrümmten Wellenfront) angewiesen ist. Allerdings ist eine vollständige Rechnung nach *Mie* erst mit Hilfe der seit etwa 1990 zur Verfügung stehenden elektronischen Gross-Rechner möglich. *Raymond R. Lee, Jr.* konnte mit deren Hilfe vergleichende Rechnungen anstellen und die ausreichende Näherung nach der Methode *Airy's* nachweisen (veröffentlicht 1998, [4], s. Abb.11).

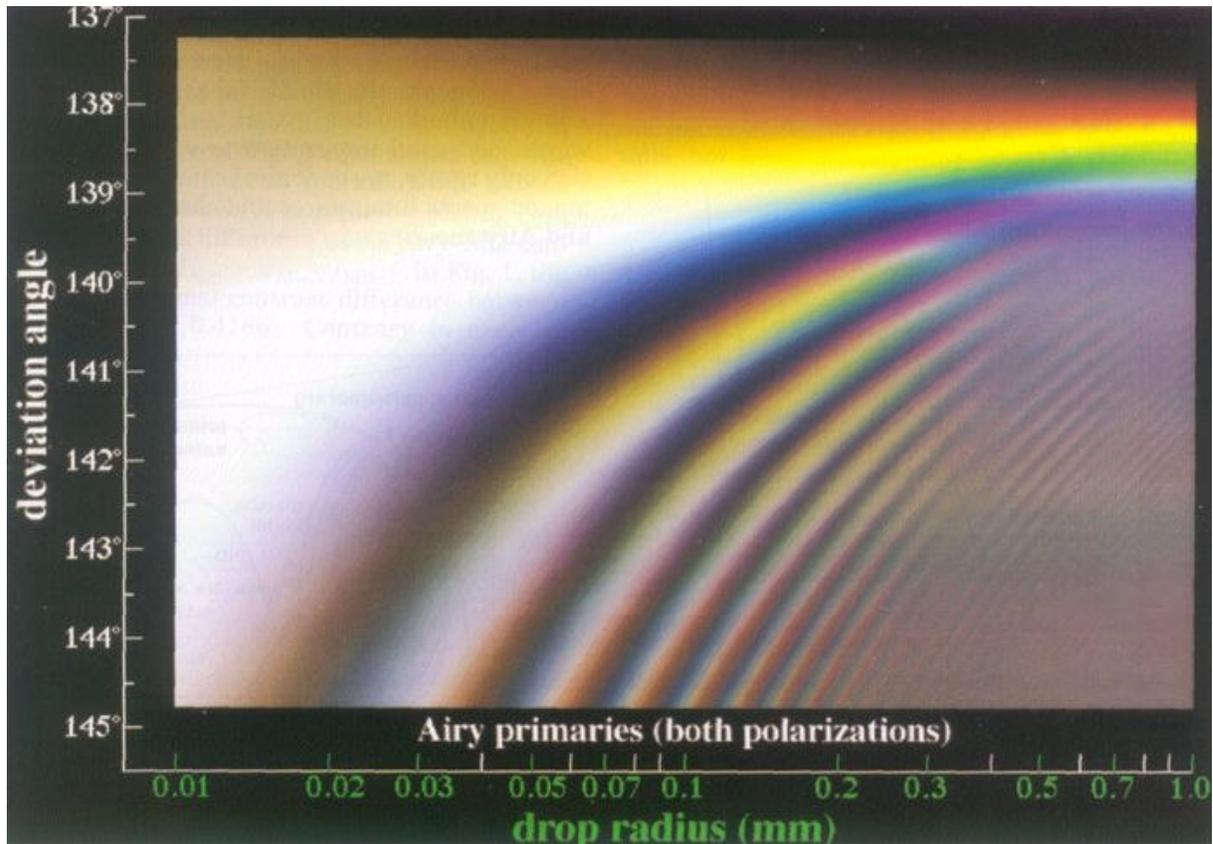


Abb.11 Die Regenbogenfarben als Funktion der Tropfengröße [4, Fig.14]

## 6. Der Regenbogen der Mathematiker

Die erweiterte Behandlung des Regenbogens (der "überzähligen" Regenbögen) mit einer "höheren" physikalischen Theorie (der Wellentheorie des Lichts) verlangte auch bessere quantitative Modelle (mathematische Methoden) zur Beschreibung. Am Regenbogen befruchteten sich Physik und Mathematik gegenseitig. Seit den Arbeiten von *Airy*, endgültig seit denen von *G. Mie* kann u.a. auch vom "Regenbogen der Mathematiker" [1] gesprochen werden.

Bei der Berechnung der Lichtintensität in der Nähe des *Descartes*'schen Grenzwinkels benutzte *Airy* ein Integral, das verallgemeinert als *Airy-Integral* (Anmerkung 4) zur Lösung der *Airy-Differentialgleichung* in die Mathematik eingegangen ist.

Obwohl die Behandlung des Regenbogens mit der sogenannten *Mie*-Streuung unanschaulich ist und keine wesentlich genauere Darstellung als bisher erbrachte, hat der dabei eingeführte Begriff "Partialwelle" allgemeine Bedeutung in der Quantenmechanik und als Abstraktum in der Mathematik erlangt.

## 7. Der Regenbogen der Wissenschaftler

Beziehungen bestehen nicht nur zwischen der Physik des optischen Regenbogens und der Mathematik, sondern auch zu anderen Zweigen der Physik und auch zur Philosophie, weshalb allgemeiner vom Regenbogen der Wissenschaftler gesprochen werden darf.

### 7.1 Descartes: Philosoph, Naturwissenschaftler und Mathematiker

*Descartes* schreibt zu Beginn seiner Abhandlung über den Regenbogen: *Der Regenbogen ist ein so bemerkenswertes Wunder der Natur [...], dass ich keine geeignetere Materie zu wählen wüsste, um aufzuzeigen, wie man durch die Methode, derer ich mich bediene, zu Kenntnissen gelangen kann [...]*. [13]

Seine *Methode* wird meist ausschließlich als eine philosophische Lehre angesehen und oft unglücklich, und deshalb unverständlich bis missverständlich, auf den Ausspruch *Ich denke, also bin ich*. [6, S.65] reduziert. Dabei handelt es sich nur um die "erste Gewissheit", auf der seine Arbeitsweise beruhte, und die er unter dem ausführlicheren Titel *Bericht über die Methode, die Vernunft richtig zu führen und die Wahrheit in den Wissenschaften zu erforschen*, veröffent-

lichte. Die Reduktion des universellen Wissenschaftlers *Descartes* in der öffentlichen Wahrnehmung auf einen Philosophen ist auch dadurch verschuldet, dass die Anhänge in den Nachdrucken seiner *Method* meistens weggelassen werden [6, s. Bemerkung in 8.]. Sie wird aber in den ursprünglich anhängenden "Essais" (etwa 6-fache Seitenzahl) konkretisiert, also nur mit ihnen zusammen vollständig dargestellt. Auf sie zu verzichten, liess sich im 17. Jahrhundert mit den von den Abbildungen verursachten hohen Kosten entschuldigen, aber heute nicht mehr.

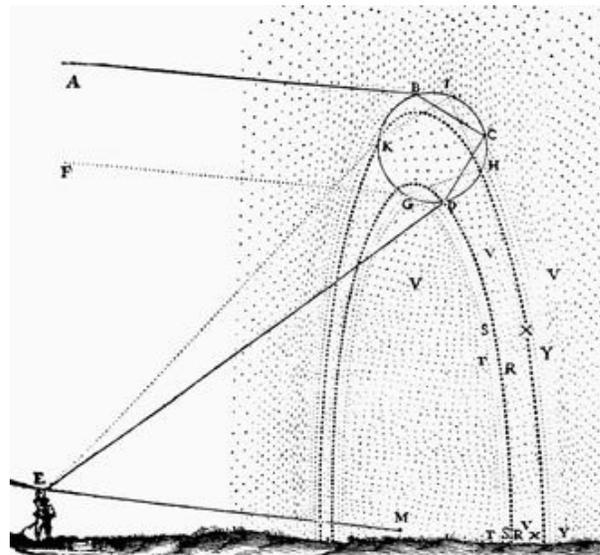
Einer der drei Essais heißt "Les Météors" (zeitgenössische Definition: Die Erscheinungen in der bis etwa zum Mond reichenden Atmosphäre), in dem *Descartes* über den Regenbogen schreibt ("de l'arc en ciel"; 10 Abbildungen, 2 Tabellen). Er wurde bis 2006 noch nicht einmal ins Deutsche übersetzt [13]. Die Behandlung des Regenbogens zeigt deutlich, welche wissenschaftliche Methode *Descartes* in die Moderne - hier in die Physik - einführt. Es handelt um weit mehr als um eine vermeintlich reduktionistische Methodologie eines mathematischen Fundamentalisten [13, Seite 10].

Er ersetzt das bisher (Scholastik) gültige teleologische Weltbild des *Aristoteles* (Ordnung der Welt hat vorhandene, nicht beeinflussbare Zweckursachen) durch ein kausalistisches, in dem eine feste Beziehung zwischen Ursache und Wirkung besteht (wobei allerdings die Herkunft der Ursache unbekannt oder zufällig sein kann). Das Denken darin ist mechanistisch mit der wesentlichen Konsequenz, dass die Kausalität durch Experimente sichtbar gemacht wird. Mit dem Einbezug von Experimenten übernimmt er eine von seinem wenig älteren Zeitgenossen *Galileo Galilei* erfolgreich begonnene Arbeitsweise.

*Descartes* experimentiert mit einer mit Wasser gefüllten Kugel (verschweigt aber, dass er ihm bekannte ältere und zeitgenössische Versuche wiederholt) und findet mit dem inzwischen bekanntem Brechungsgesetz (dessen zeitgenössischen Entdecker *Snellius* er nicht erwähnt) auf mechanistische Weise die Lichtkonzentration im Wassertropfen in der unmittelbaren Nähe eines Grenzwinkels für die Ablenkung.

Die abschliessend eingefügte Zeichnung (Abb.12) hat *Descartes* selbst angefertigt. Sie ist eine spielerische Zusammenfassung seiner Regenbogen-Arbeit (für den Einstieg wenig geeignet). In den Regen-Himmel ist ein über-großer Tropfen eingezeichnet, der gerade so

groß gewählt ist, dass die Haupt- und Nebenregenbogen ausmachenden Lichtkonzentrationen vom Beobachter im richtigen Winkelverhältnis gesehen werden.



**Abb.12** Zeichnung von *Descartes* aus "Les Météors" [13, Seiten 218 und 222]

## 7.2 Die Regenbogen-Streuung der Physiker

Heute scheint es keinen Bedarf mehr an besseren Theorien und mathematischen Modellen für den Regenbogen zu geben. So werden z.B. in (makroskopischen) Wassertropfen keine Quanteneffekte vermutet; ihre Fallgeschwindigkeit ist weit von der Lichtgeschwindigkeit entfernt. Aber auch künftige Wissenschaftler brauchen wie alle Menschen das Beobachten der Naturerscheinungen wie die Luft zum Atmen. Deshalb wird auch die wissenschaftliche Behandlung des optischen Regenbogens nicht aufhören [9].

Am wahrscheinlichsten ist die Fortsetzung der Behandlung der sogenannten "Regenbogen-Streuung" kleinster Teilchen (die Mie-Streuung gilt für Teilchen beliebiger Größe). Dieses physikalische Thema ist jünger als die Behandlung des Regenbogens. Es ist so jung wie die Atom- und die Teilchenphysik. Vom Regenbogen entlehnt es den namengebenden Begriff (umgekehrt wurde "Stoßparameter" für die Beschreibung des Regenbogens übernommen), ist aber mit dem Regenbogen nur formal verwandt. Kleine Teile ziehen sich gegenseitig an, wodurch sie von ihrer Bahn abgelenkt werden. Wenn sie sich zu nahe gekommen sind, überwiegt gegenseitiges Abstoßen, so dass ihre Ablenkung nur bis zu einem Grenzwinkel, dem "Regenbogenwinkel" möglich ist, und sie dort auch in höherer Konzentration vorliegen. Das ist die einzige anschauliche Gemeinsamkeit

zwischen der Licht-Konzentration durch Wassertropfen und der Teilchen-Streuung durch gegenseitiges Anziehen und Abstoßen. Gar nicht zusammen passt, dass das Licht in die relativ großen Wassertropfen eindringt, die relativ kleinen Teilchen sich aber nicht einmal berühren.

### 7.3 Halbklassische Physik

Als klassische Physik bezeichnet man alle physikalischen Theorien, die bis zum Ende des 19. Jahrhunderts ausgearbeitet wurden. Das sind die klassische Mechanik, die Elektrodynamik, die Thermodynamik und die Optik. Quantenmechanik und Relativitätstheorie sind die Moderne Physik, die die Klassische Physik ergänzt. Um eine Brücke zwischen beiden Teilen zu schlagen, wird oft der Begriff Halbklassisch (oder Halbklassische Physik) gebraucht und als Beispiel dafür der Regenbogen genannt. Im besonderen soll damit eine Abgrenzung zur Physik *Newtons* hergestellt werden, indem betont wird, dass dem Licht und dem Regenbogen sowohl Wellen- als auch Teilchen-Natur zuzuordnen ist. Andererseits kann auf rein quantenmechanische Betrachtungen verzichtet werden, was immer möglich ist, wenn die Wellenlänge des Lichtes viel kleiner als der Durchmesser der Streuer ist. Das ist bei Regentropfen und sichtbarem Licht der Fall [2, S.82].

### 8. Literatur (inklusive Bildnachweise)

- [1] Carl B. Boyer: "The Rainbow (From Myth to Mathematics)", Macmillan, 1987
- [2] Helmut Haberland: "Regenbögen", Physik in unserer Zeit, 1977, Verlag Chemie
- [3] W.J. Humphreys: "Physics of the Air", Dover Publications, New York, 1964
- [4] Raymond R. Lee, Jr.: "Mie theory, Airy theorie, and the natural rainbow", Applied Optics, März 1998
- [5] Lotze/Schneider (Hsg.): "Wege in der Physikdidaktik, Band 5: Naturphänomene und Astronomie", S. 55(15), [www.solstice.de/cms/upload/wege/band5/Wege5-42-56.pdf](http://www.solstice.de/cms/upload/wege/band5/Wege5-42-56.pdf)
- [6] Holger Ostwald (Herausgeber und Übersetzer): "René Descartes - Discours de la Méthode / Bericht über die Methode", Reclam, 2001, S.149:  
*Zu dieser Ausgabe:  
Da die [Anhänge] philosophisch von weniger großem Interesse sind, sind sie, wie allgemein üblich, weggelassen*
- [7] J.M. Perntner: "Ein Versuch, der richtigen Theorie des Regenbogens Eingang in die Mittelschulen zu verschaffen", Wien, 1898

- [8] Perntner-Exner: "Meteorologische Optik", Wilhelm Braumüller, 1910
- [9] Michael Vollmer: "Das ist ein seltsam wunderbares Zeichen", Naturwissenschaftliche Rundschau, Heft 10, 2000
- [10] Jearl D. Walker: "Multible Rainbows from sigle drops of water and other liquids", American Journal of Physics, May 1976, S.421-31
- [11] Wikipedia; Datei:Double-alaskan-rainbow.jpg, [de.wikipedia.org](http://de.wikipedia.org)
- [12] Dietrich Zawischa: Über den Regenbogen, Seite 5, Bild 4, [www.itp.uni-hannover.de/~zawischa/ITP/regnbvg03.pdf](http://www.itp.uni-hannover.de/~zawischa/ITP/regnbvg03.pdf)
- [13] Claus Zittel (Herausgeber, Übersetzer und Kommentator): "René Descartes - Les Météors / Die Meteore", Zeitsprünge, Band 10 (2006), Heft 1/2, Klostermann, Frankfurt

### 9. Anmerkungen

#### Anmerkung 1:

Die von *Descartes* angegebenen Winkel weichen geringfügig von den heute ermittelten ab: Hauptregenbogen; heute 42° anstatt 41,5° Nebenregenbogen: heute 51° anstatt 52°.

#### Anmerkung 2:

Das in einem Spot angereicherte drei und vier mal reflektierte Licht verlässt den Tropfen auf der vom Beobachter abgewandten Seite. Fünf mal reflektiertes Licht gelangt wieder zum Beobachter, ist aber zu schwach, jemals mit bloßem Auge erkannt zu werden.

#### Anmerkung 3:

Kurios ist, dass *Potter* vordergründig das Wellenmodell ablehnte, es aber benutzte und auch die Sprache der Wellentheorie verwendete mit Ausnahme des Worts *Welle*. So sagte er z.B. *luminous surface* anstatt *wave-front* [1, S.297].

#### Anmerkung 4:

Erklärung an Hand der unten folgenden Abbildung 13 (vgl. auch Abb.9).

Als erstes ist die Form der nach dem Passieren des Tropfens nicht mehr geraden (räumliche Betrachtung: nicht mehr ebenen) Wellenfront zu beschreiben. Airy näherte sie als kubische Parabel  $y = c \cdot x^3$  mit Wendepunkt auf dem *Descartes*-Grenzwinkel-Strahl. Um den zweiten Schritt, die Bestimmung des beim Beobachter ankommenden Intensitäts-Bildes des Regenbogen-Lichtes anschaulich zu machen, wird nur ein sehr kleines Stück davon benötigt. Es ist an der Stelle **D** vergrößert daneben dargestellt.



Der Graph  $\mathbf{f}(\mathbf{m})^2$  (Abb.10b) ist bei seiner Anwendung auf den Regenbogen für jede Farbe und für jede Tropfengröße neu zu zeichnen und mit  $\theta$  neu zu skalieren ( $\mathbf{f}(\mathbf{m})^2 \rightarrow \mathbf{f}(\theta)^2$ ). Dafür ist der Ausdruck  $\mathbf{m} = \mathbf{f}(\mathbf{n}, \mathbf{a}, \lambda, \theta)$  nach  $\theta$  aufzulösen;  $\mathbf{f}(\theta)^2$  ist mit der Konstante  $\mathbf{M}^2$  zu multiplizieren. Anschließend sind die Kurven möglichst vieler Farben additiv zu mischen (Abb.11, gilt für den Hauptregenbogen und enthält zusätzlich den Parameter Tropfengröße  $\mathbf{a}/2$ ).

Die wissenschaftliche Arbeit von *Potter* und *Airy* hat *J.M. Perntner* für Nicht-Wissenschaftler aufbereitet [8]. Er verfolgte damit das ehrgeizige Ziel, dass deren Theorie in der Schule gelehrt werden kann [7].

Mai 2010 (Juni 2011)  
Siegfried Wetzel, 3400 CH Burgdorf  
s.Wet@gmx.net www: sWetzel.ch

