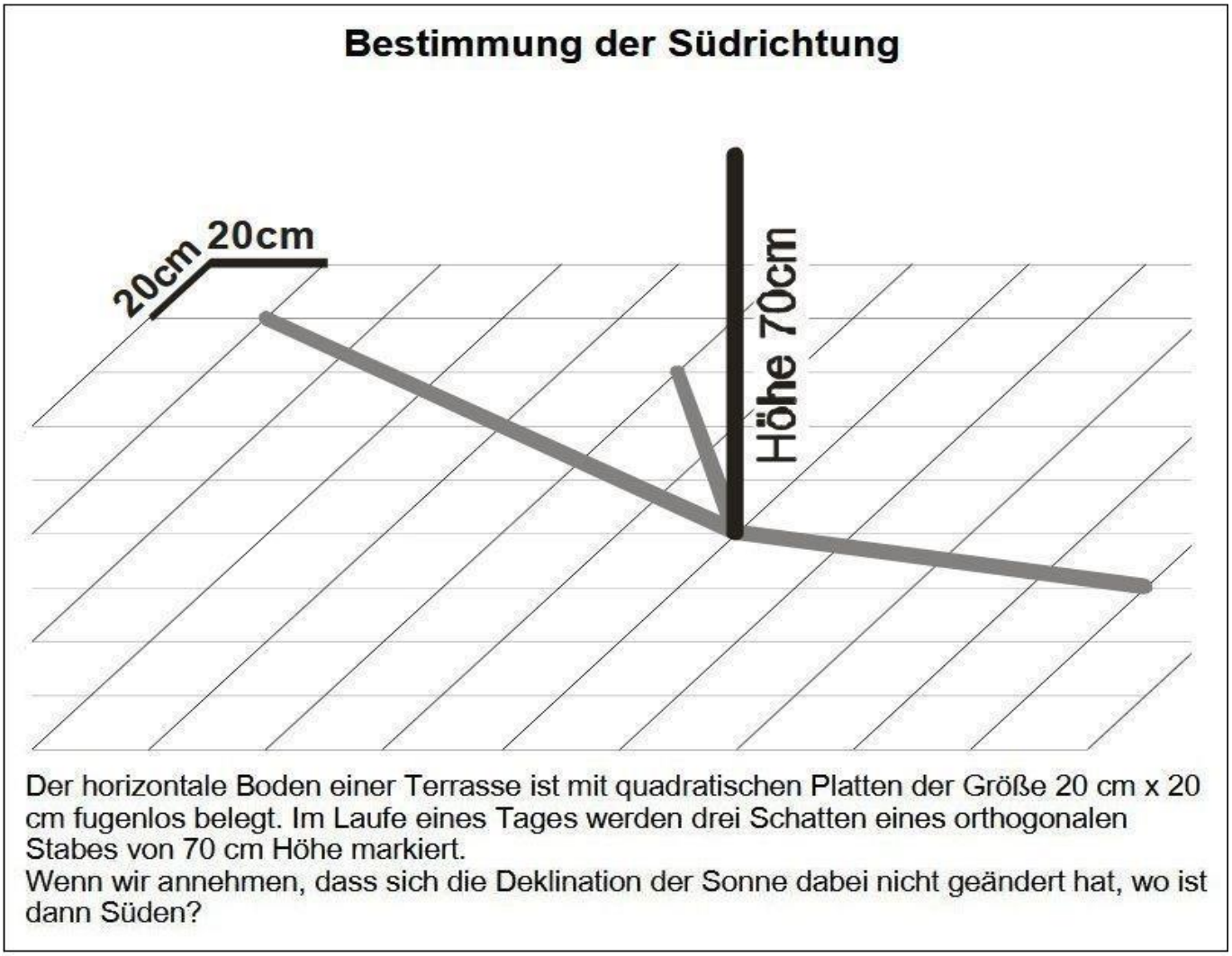
DGC-Aufgabe 2026

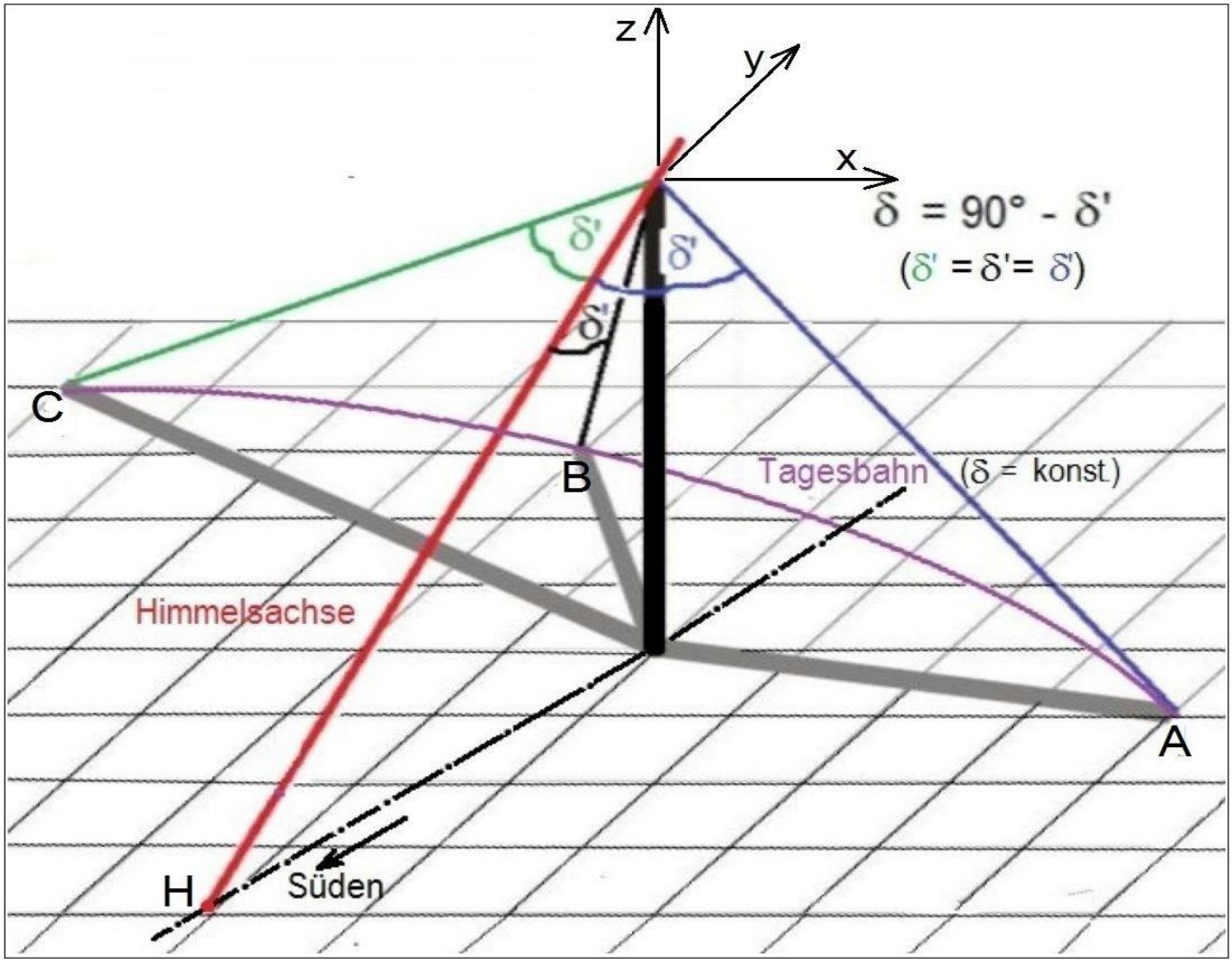


Die Enden der drei Stabschatten liegen auf einer sogenannten *Tagesbahn* (Dekination ϑ der Sonne = const, Bahnform = Hyperbel). Deren Symmegtrieachse (*Hauptachse a*) verläuft durch den Fußpunkt des Schattenstabes und weiter in Richtung Süden. Diese Hyperbel ist ein Schnitt durch den Mantel desjenigen Kegels, in dem sich die von der Stabspitze zu den Punkten A bis C führenden Sonnenstrahlen befinden. Um die Südrichtung angeben zu können, genügt es bereits, die Achse (Lage und Richtung) dieses Kegels (*Himmelsachse* , Erdachsparallele, *Polstab* eines bestimmten Sonnenuhrentyps) zu bestimmen, denn sie befinet sich in der *Meridianebene*
(Kreis, der durch die Himmelspole und den Zenit dieses Ortes verläuft.)

Die bestimmenden Sonnenstrahlen haben zwischen sich und der Himmelsachse je den Winkel ϑ' (= 90° - ϑ). Somit sind 3 Ausdrücke für die Bestimmung der Richtung der Himmelsachse gegeben. Die von der Stabspitze (Zentrum eines karthesischen Koordinatensystems) zu den Punkten A bis C führenden Strahlen werden als Ortsvektoren behandelt. Die z-Achse ist der verlängerte Schattenstab, und x- und y-Achse sind Parallelen zu den Plattenfugen am Boden.

Um das Rechnen mit relativ kleinen ganzen Zahlen beginnen zu können, wird als Längeneinheit der Dezimeter gewählt (Bodenplatte: Seitenlänge gleich 2 dm).

Punkt /Kord.	x	y	z
A	8	-2	-7
B	-4	6	-7
C	-12	8	-7
H	x	y	-7



Die Ebenen, in denen sich die Winkel ϑ‘ befinden, liegen *allgemein* im Raum.
Eine einfache Methode damit umzugehen, ist das Rechnen mit Vektoren, wobei der Winkel ϑ‘ zwischen je zwei Ortsvektoren in der Schreibweise

$$\vec{a} \cdot \vec{h} = |\vec{a}| \cdot |\vec{h}| \cdot \cos\delta'$$

$$\vec{b} \cdot \vec{h} = |\vec{b}| \cdot |\vec{h}| \cdot \cos\delta'$$

$$\vec{c} \cdot \vec{h} = |\vec{c}| \cdot |\vec{h}| \cdot \cos\delta'$$

des *Skalarproduktes* erscheint.

Die Ortsvektoren von der Stabspitze zu den Punkten A bis C und zum Fußpunkt H der Himmelsachse (Polstab) sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} +8 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ +6 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ +8 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor zum Punkt H ist die zu ermittelnde Größe. Dass seine z-Komponente mit -7 bereits bekannt ist, kann vorerst unberücksichtigt bleiben.

Die rechte Seite der Skalarproduktausdrücke ist für das weitere Vorgehen vorteilhaft einheitlich, wenn die Längen

$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ und $|\vec{c}|$

entfallen bzw. je durch 1 ersetzt werden. Das ist möglich durch *Normieren* der zugehörenden Ortsvektoren, wobei diese je auf die Länge 1 durch Dividieren ihrer Komponenten durch die urspüngliche Länge umgewandelt werden. Die ursprünglichen Längen sind

$$|\vec{a}| = \sqrt{117} \quad |\vec{b}| = \sqrt{101} \quad |\vec{c}| = \sqrt{257}$$

Die normierten Vektoren lauten

$$\vec{an} = \begin{pmatrix} +8/\sqrt{117} \\ -2/\sqrt{117} \\ -7/\sqrt{117} \end{pmatrix} \quad \vec{bn} = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{101} \\ +6/\sqrt{101} \\ -7/\sqrt{101} \end{pmatrix} \quad \vec{cn} = \begin{pmatrix} -12/\sqrt{257} \\ +8/\sqrt{257} \\ -7/\sqrt{257} \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor zum Punkt H ist in allen drei Skalarproduktausdrücken enthalten, weshalb er unnormiert bleiben kann. Seine Ausgangslänge wird mit cosϑ' zum Parameter p zusammengefasst.

$$p = \cos\vartheta' \cdot |\vec{h}|$$

Die derart behandelten und umgeformten Skalarproduktausdrücke lauten

$$\begin{pmatrix} +8/\sqrt{117} \\ -2/\sqrt{117} \\ -7/\sqrt{117} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \quad \begin{pmatrix} -4/\sqrt{101} \\ +6/\sqrt{101} \\ -7/\sqrt{101} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \quad \begin{pmatrix} -12/\sqrt{257} \\ +8/\sqrt{257} \\ -7/\sqrt{257} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems (mit https://www.matrixcalc.org/de/slu.html) in Abhängikeit vom Parameter p für die Koordinaten des Ortsvektors zum Punkt H lautet:

$$\begin{aligned} x &= -1{,}235 \cdot p \\ y &= -1{,}948 \cdot p \\ z &= -2{,}400 \cdot p \end{aligned}$$

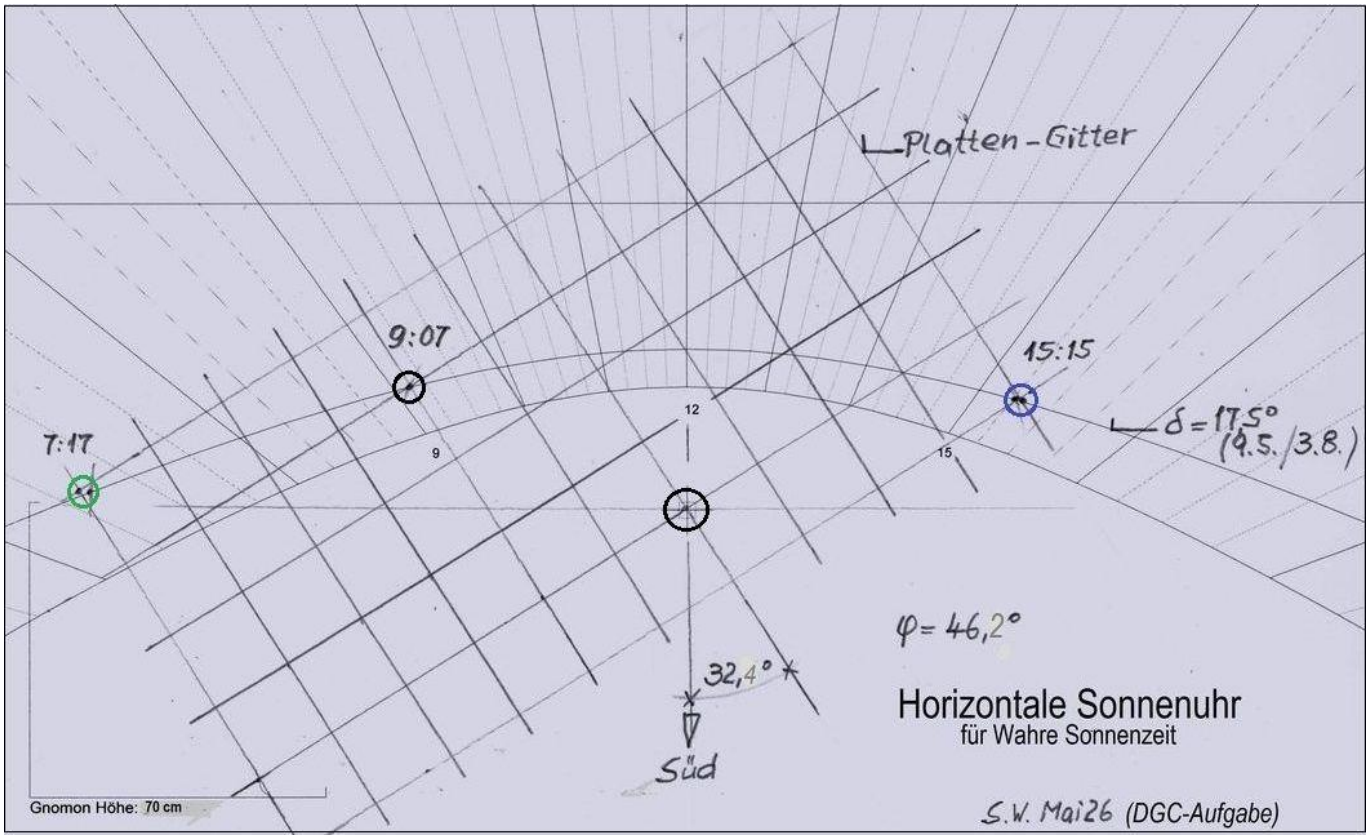
Die Südrichtung ergibt sich aus arctan(x/y) = 32,4°. Um diesen Winkelwert ist das Plattenmuster im Gegenuhrzeigersinn aus der Südrichtung verdreht.

Mit dem bekannten tatsächlichen Wert z =-7 (Stabhöhe) wird p = 7/2,4 = 2,917.
Die beiden anderen Koordinaten dieses Vektors sind somit tatsächlich
x = - 3,602 und y = -5,682.

Die geographische Breite φ am Ort der Sonnenuhr ist der Winkel zwischen der horizontalen Ebene und dem Polstab. Dessen Fußpunkt ist $\sqrt{x^2+y^2}$ = 6,720 dm vom 7 dm hohen Schattenstab entfernt. >>> **φ** = arctan (7/6,72) = **46,2°**.

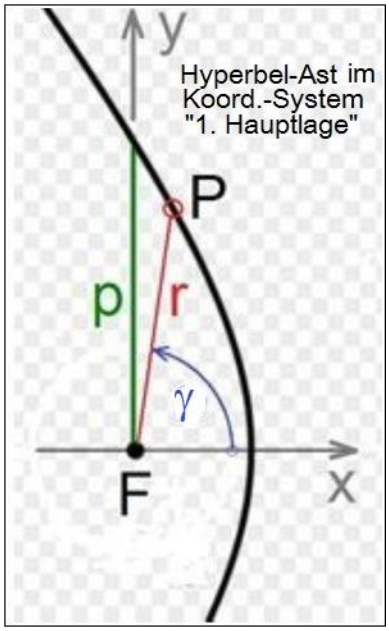
Zur Berechnung des Winkels ϑ' wird die Länge des Vektors zum Punkt H (Länge des Polstabes) benötigt. Diese ist p• $\sqrt{1{,}235^2+1{,}948^2+2{,}4x^2}$ = 9,701 dm.
cosϑ' = p/ 9,704 >>> ϑ'= 72,52° >>> ϑ = 90°-ϑ' = 17,48°
Die Sonnendeklination hatte am Tage der Beobachtung den Wert **ϑ = +17,5°.**

Im folgenden Bild ist dem Plattenboden mit Schattenstab eine mit dem Konstruktionsprogramm „Sonne“ von *Helmut Sonderegger* erstellte horizontale Sonnenuhr überlagert. Auf dieser sind die den Punkten A bis C entsprechenden **Tageszeiten** (Wahre Sonnenzeit) eingetragen.



Juni 2026 Siegfried Wetzel

Alternative zur Ermittlung der Tageskurve für ϑ= 17,5° (s. vorherige Zeichnung)



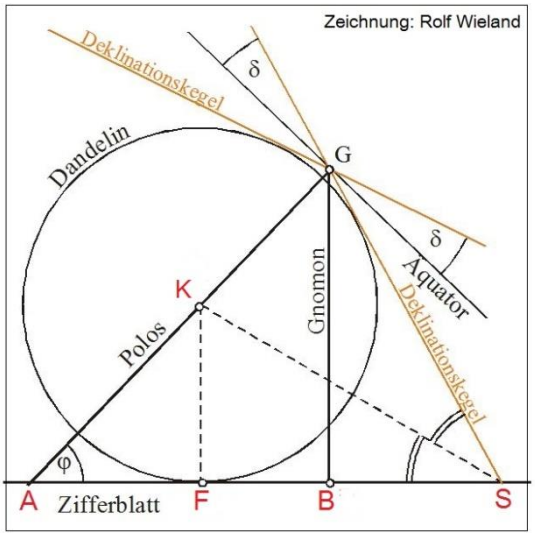
Die von den äußeren Enden der drei Schatten gebildete Tageskurve ist bekannterweise eine Hyperbel, die z.B. mit der folgenden Polargleichung beschrieben werden kann:

(1) $r = p / (1+ \varepsilon \cdot \cos(\gamma))$ (s. Abb. links)

Der Pol befindet sich in einem Brennpunkt F.
r ist die Strecke zwischen einem Punkt P auf einem der beiden Äste der Hyperbel und dem diesen näheren Brennpunkt.
p ist der sogenannte *Halbparameter*.
ε ist die *numerische Exzentrizität* (ε>1 bei einer Hyperbel).

In derAufgabenstellung wird das den Bodenplattenkanten folgende Kordinatensystem verwendet. Dieses ist gegen das Koordinatensytem der sogenannten „1. Hauptlage“ einer Hyperbel mit ψ = 90°- 32,4° verdreht, und sein Ursprung befindet sich nicht im Brenn-, sondern im Fußpunkt des vertikalen Schattenstabes.

Um die Polargleichung anwenden zu können, müssen die gegebenen Koordinaten in zwei Schritten in die Koordinaten *„1. Hauptlage“* umgerechnet werden.
1. in die Koordinaten des mit ψ gedrehten Systems,
2. in die Koordinaten des in den Brennpunkt verschobenen, vorher gedrehten System.

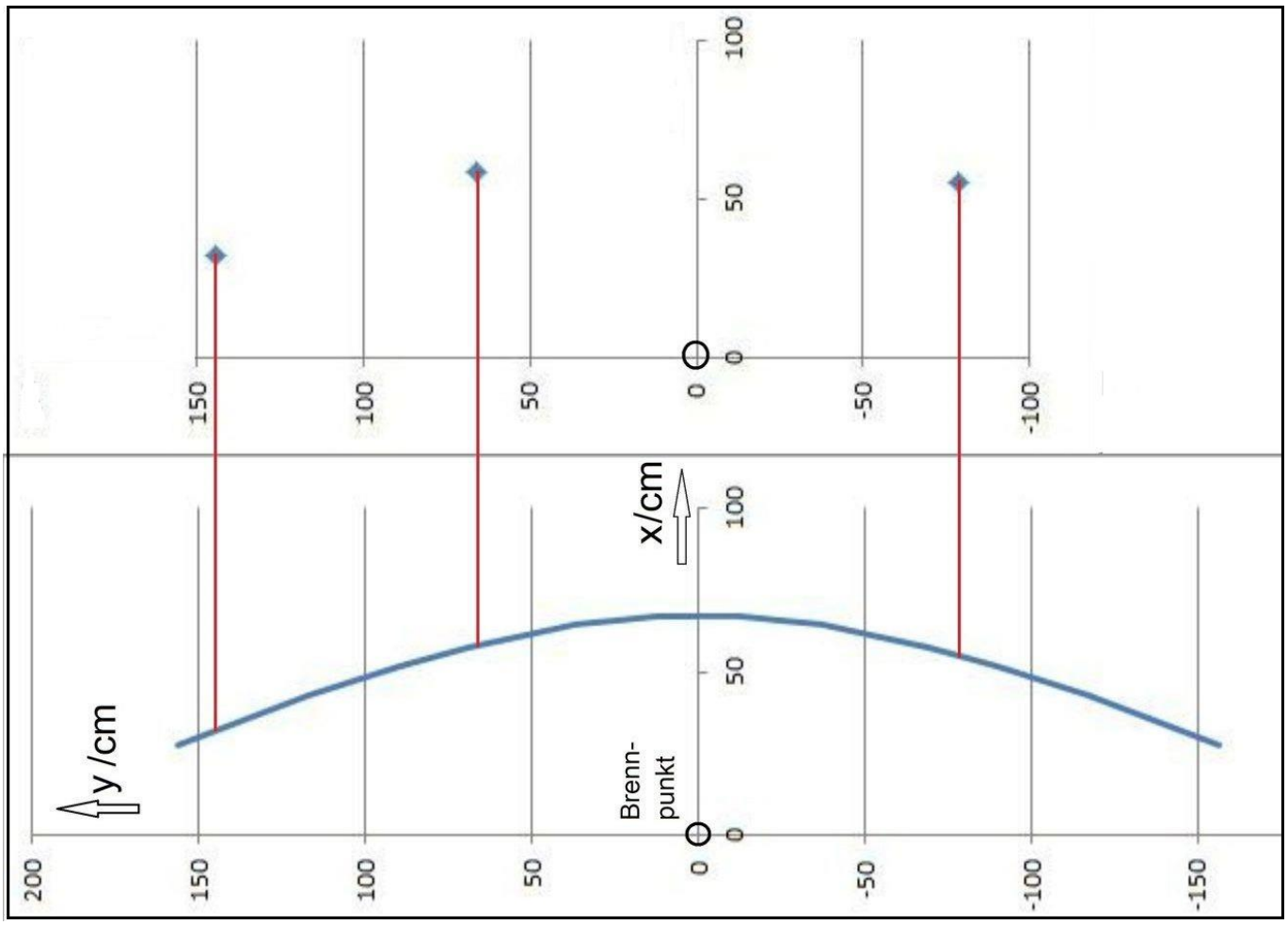


Das Maß der Verschiebung zwischen Fußpunkt B und Brennpunkt F wird mithilfe einer *Dandelin*schen Kugel bestimmt (Abb. links).

Diese liegt liegt im Deklinationskegel und in der Kegelschnitt-Ebene (Zifferblatt) im Brennpunkt der Schnittkurve (Hyperbel) an .

Mit den Vorgaben Gnomon-/Stabhöhe (70 cm) und Deklinationswinkel (ϑ = 17,5°) ergibt die Rechnung : 28,94 cm.

Mit den transformierten Lagedaten von zwei der drei vorgegebenen Schattenpunkte findet man die Parameter p und ε der Gl. (1): p = 222,74 cm ε = 2,32 .
Die gesuchte Tageskurve für ϑ= 17,5° lässt sich nun zeichnen (s. folgende Abb.)



Hyperbel-Kenngrößen a und b:

Gleichungssystem $\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}\ /a$ $p = \frac{b^2}{a}$

Mit p = 222,74 cm und ε = 2,32 folgt a = 51,01 cm b = 106,59 cm

Anmerkungen:

1. Alle Rechenschritte lassen sich im Ausgabeblatt der Excel-Arbeit (zurück zur Hauptseite) verfolgen.

2. Da mit Excel Kurven nur aus Scharen von Punkten erstellt werden können, die mit x-y-Koordinaten codiert sind, mussten die polar (ε und r) codierten Punkte in kartesisch codierte Punkte zurückverwandelt werden.

Juli 2026 Siegfried Wetzel