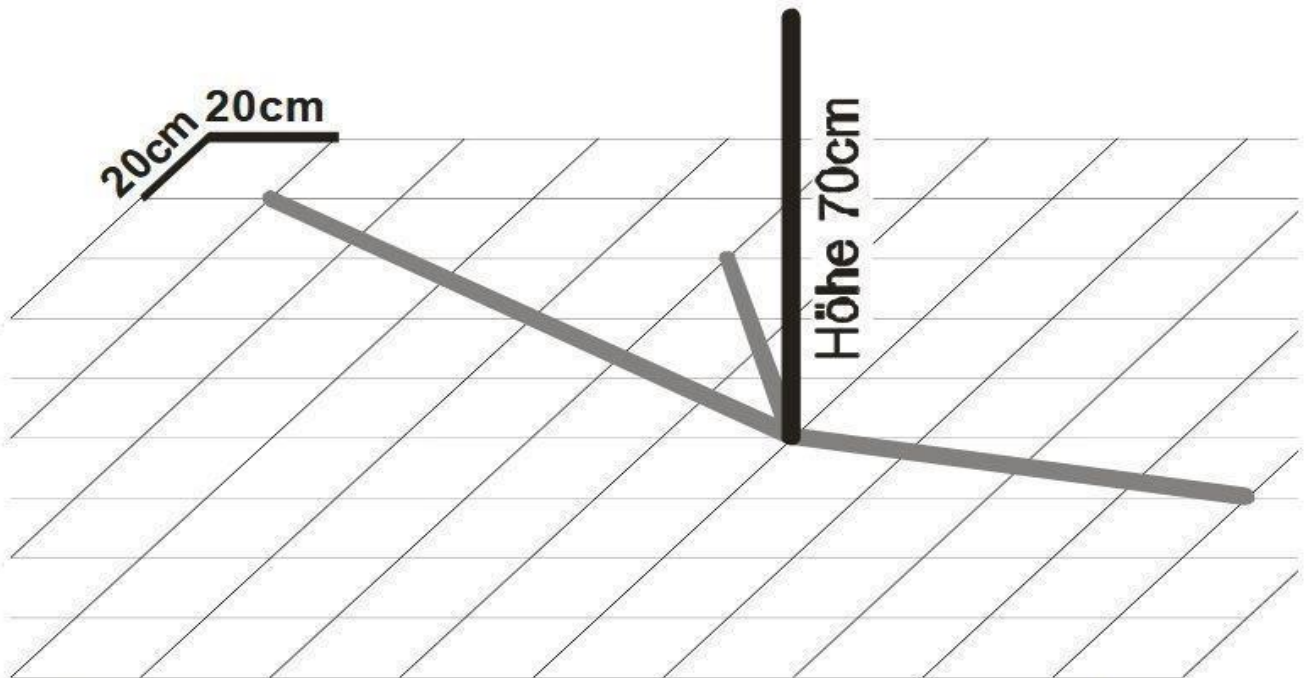


DGC-Aufgabe 2026

Bestimmung der Südrichtung

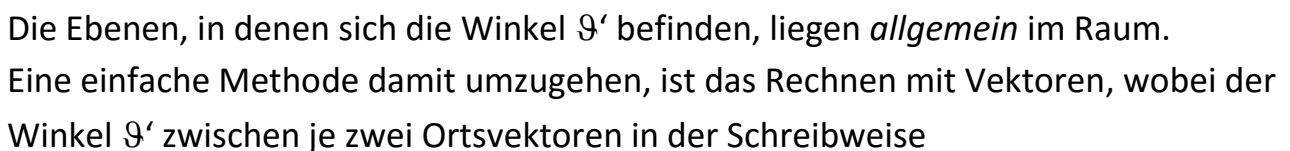


Der horizontale Boden einer Terrasse ist mit quadratischen Platten der Größe 20 cm x 20 cm fugenlos belegt. Im Laufe eines Tages werden drei Schatten eines orthogonalen Stabes von 70 cm Höhe markiert. Wenn wir annehmen, dass sich die Deklination der Sonne dabei nicht geändert hat, wo ist dann Süden?

Die Enden der drei Stabschatten liegen auf einer sogenannten *Tagesbahn* (Deklination ϑ der Sonne = const, Bahnform = Hyperbel). Deren Symmetrieachse (*Hauptachse a*) verläuft durch den Fußpunkt des Schattenstabes und weiter in Richtung Süden. Diese Hyperbel ist ein Schnitt durch den Mantel desjenigen Kegels, in dem sich die von der Stabspitze zu den Punkten A bis C führenden Sonnenstrahlen befinden. Um die Südrichtung angeben zu können, genügt es bereits, die Achse (Lage und Richtung) dieses Kegels (*Himmelsachse*, Erdachsparellele, *Polstab* eines bestimmten Sonnenuhrentyps) zu bestimmen, denn sie befindet sich in der *Meridianebene* (Kreis, der durch die Himmelspole und den Zenit dieses Ortes verläuft.)

Die bestimmenden Sonnenstrahlen haben zwischen sich und der Himmelsachse je den Winkel $\vartheta' (= 90^\circ - \vartheta)$. Somit sind 3 Ausdrücke für die Bestimmung der Richtung der Himmelsachse gegeben. Die von der Stabspitze (Zentrum eines kartesischen Koordinatensystems) zu den Punkten A bis C führenden Strahlen werden als Ortsvektoren behandelt. Die z-Achse ist der verlängerte Schattenstab, und x- und y-Achse sind Parallelen zu den Plattenfugen am Boden.

Punkt /Kord.	x	y	z
A	8	-2	-7
B	-4	6	-7
C	-12	8	-7
H	x	y	-7



$$\vec{c} \cdot \vec{h} = |\vec{c}| \cdot |\vec{h}| \cdot \cos \delta'$$

des *Skalarproduktes* erscheint.

Die Ortsvektoren von der Stabspitze zu den Punkten A bis C und zum Fußpunkt H der Himmelsachse (Polstab) sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} +8 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ +6 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ +8 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor zum Punkt H ist die zu ermittelnde Größe. Dass seine z-Komponente mit -7 bereits bekannt ist, kann vorerst unberücksichtigt bleiben.

Die rechte Seite der Skalarproduktausdrücke ist für das weitere Vorgehen vorteilhaft einheitlich, wenn die Längen

$$|\vec{a}|, |\vec{b}| \text{ und } |\vec{c}|$$

entfallen bzw. je durch 1 ersetzt werden. Das ist möglich durch *Normieren* der zugehörigen Ortsvektoren, wobei diese je auf die Länge 1 durch Dividieren ihrer Komponenten durch die ursprüngliche Länge umgewandelt werden. Die ursprünglichen Längen sind

$$|\vec{a}| = \sqrt{117} \quad |\vec{b}| = \sqrt{101} \quad |\vec{c}| = \sqrt{257}$$

Die normierten Vektoren lauten

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} +8/\sqrt{117} \\ -2/\sqrt{117} \\ -7/\sqrt{117} \end{pmatrix} \quad \vec{b}_n = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{101} \\ +6/\sqrt{101} \\ -7/\sqrt{101} \end{pmatrix} \quad \vec{c}_n = \begin{pmatrix} -12/\sqrt{257} \\ +8/\sqrt{257} \\ -7/\sqrt{257} \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor zum Punkt H ist in allen drei Skalarproduktausdrücken enthalten, weshalb er unnormiert bleiben kann. Seine Ausgangslänge wird mit $\cos\vartheta'$ zum Parameter p zusammengefasst.

$$p = \cos\vartheta' \cdot |\vec{h}|$$

Die derart behandelten und umgeformten Skalarproduktausdrücke lauten

$$\begin{pmatrix} +8/\sqrt{117} \\ -2/\sqrt{117} \\ -7/\sqrt{117} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \quad \begin{pmatrix} -4/\sqrt{101} \\ +6/\sqrt{101} \\ -7/\sqrt{101} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \quad \begin{pmatrix} -12/\sqrt{257} \\ +8/\sqrt{257} \\ -7/\sqrt{257} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems (mit <https://www.matrixcalc.org/de/slu.html>) in Abhängigkeit vom Parameter p für die Koordinaten des Ortsvektors zum Punkt H lautet:

$$x = -1,235 \cdot p$$

$$y = -1,948 \cdot p$$

$$z = -2,400 \cdot p$$

Die Südrichtung ergibt sich aus $\arctan(x/y) = 32,4^\circ$. Um diesen Winkelwert ist das Plattenmuster im Gegenuhrzeigersinn aus der Südrichtung verdreht.

Mit dem bekannten absoluten Wert $z = -7$ (Stabhöhe) wird $p = 7/2,4 = 2,917$.

Die beiden anderen Koordinaten dieses Vektors sind somit absolut

$x = -3,602$ und $y = -5,682$.

Zugaben

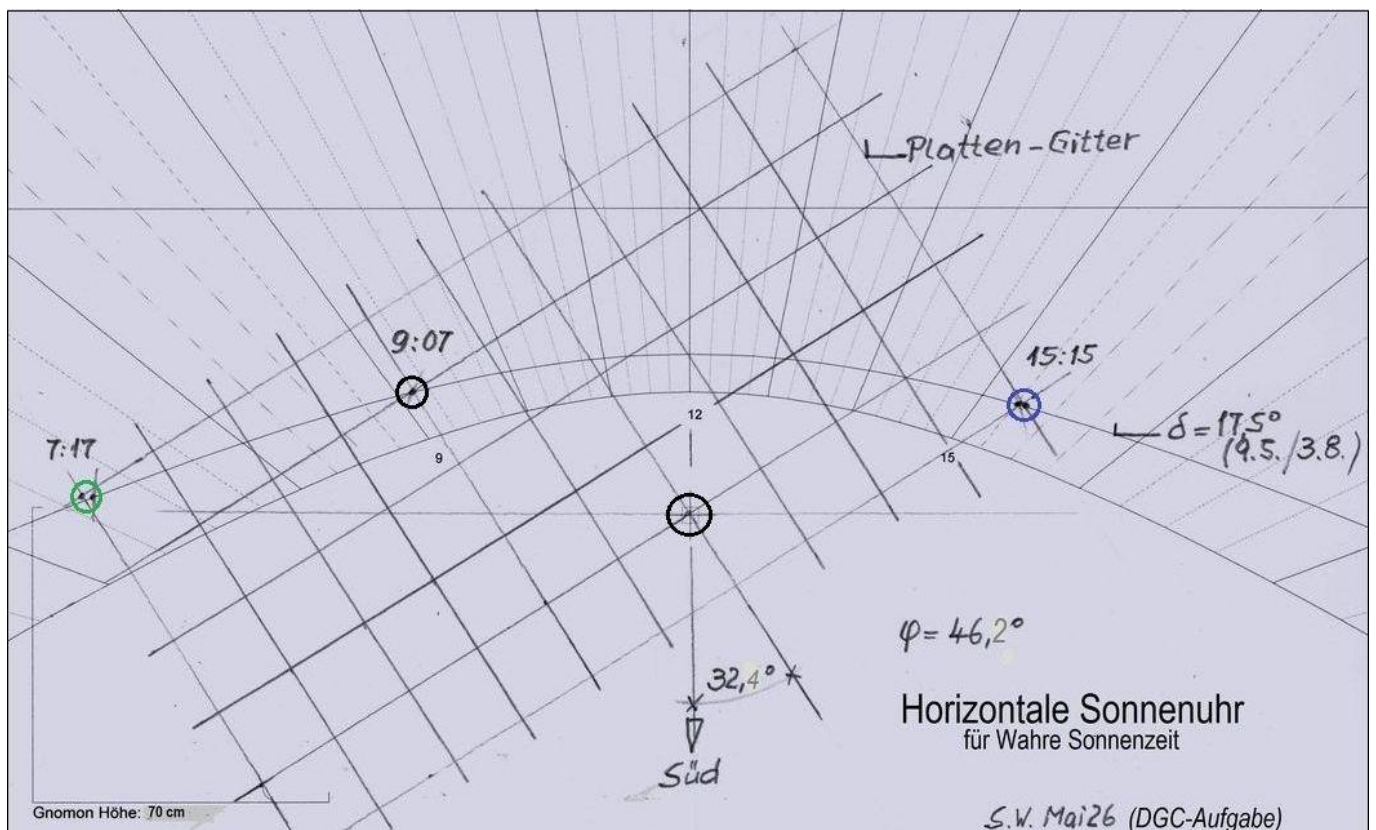
Die geographische Breite φ am Ort der Sonnenuhr ist der Winkel zwischen der horizontalen Ebene und dem Polstab. Dessen Fußpunkt ist $\sqrt{x^2 + y^2} = 6,720$ dm vom 7 dm hohen Schattenstab entfernt. >>> $\varphi = \arctan(7/6,72) = 46,2^\circ$.

Zur Berechnung des Winkels ϑ' wird die Länge des Vektors zum Punkt H (Länge des Polstabes) benötigt. Diese ist $p \cdot \sqrt{1,235^2 + 1,948^2 + 2,4x^2} = 9,701$ dm.

$\cos \vartheta' = p / 9,704 \gg \vartheta' = 72,52^\circ \gg \vartheta = 90^\circ - \vartheta' = 17,48^\circ$

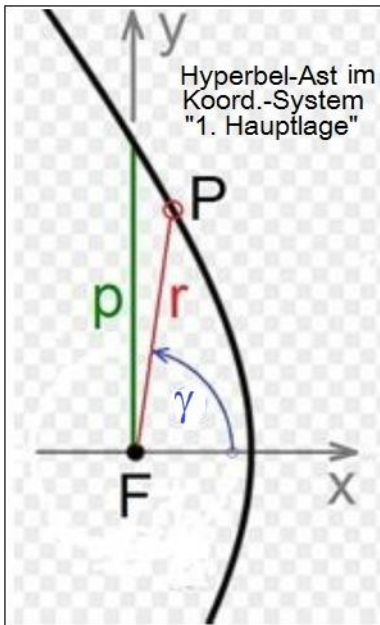
Die Sonnendeklination hatte am Tage der Beobachtung den Wert $\vartheta = +17,5^\circ$.

Im folgenden Bild ist dem Plattenboden mit Schattenstab eine mit dem Konstruktionsprogramm „Sonne“ von *Helmut Sonderegger* erstellte horizontale Sonnenuhr überlagert. Auf dieser sind die den Punkten A bis C entsprechenden **Tageszeiten** (Wahre Sonnenzeit) eingetragen.



Alternatives Zeichnen der Tageskurve für $\vartheta = 17,5^\circ$

(anstatt Benutzen eines fremden Konstruktionsprogramms wie in vorheriger Zeichnung)



Die von den äußeren Enden der drei Schatten als Hyperbel gebildete Tageskurve kann u.a. auch mit einer Polargleichung beschrieben werden:

$$(1) \quad r = p / (1 + \varepsilon \cdot \cos(\gamma)) \quad (\text{s. Abb. links})$$

Der Pol befindet sich im Brennpunkt **F** des zu zeichnenden Hyperbel-Astes.

r ist die Strecke zwischen einem Punkt P auf diesem Ast und dem zugehörigen Brennpunkt.

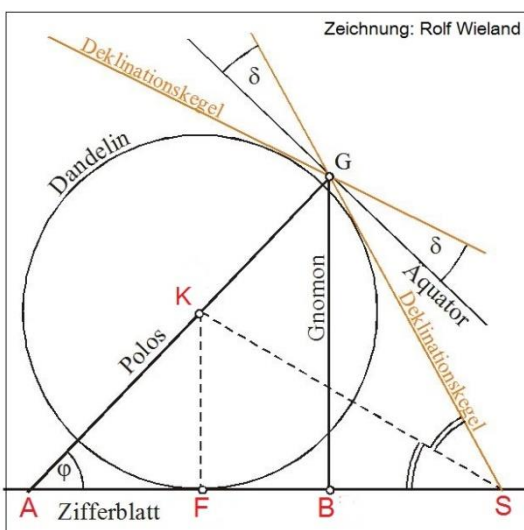
p ist der sogenannte *Halbparameter*.

ϵ ist die *numerische Exzentrizität* ($\epsilon > 1$ bei Hyperbel n).

In der Aufgabenstellung wird das den Bodenplattenkanten angepasste Koordinatensystem verwendet. Dieses ist gegen das Koordinatensystem der sogenannten „1. Hauptlage“ der Hyperbel mit $\psi = 90^\circ - 32,4^\circ$ verdreht, und sein Ursprung befindet sich nicht im Brenn-, sondern im Fußpunkt des vertikalen Schattenstabes.

Um die Polargleichung anwenden zu können, müssen die gegebenen Koordinaten in zwei Schritten in die Koordinaten einer der zwei „Hauptlagen“ (gewählt ist die 1. Hauptlage) umgerechnet werden.

1. in die Koordinaten des mit ψ im Fußpunkt gedrehten Systems,
2. in die Koordinaten des in den Brennpunkt verschobenen, vorher gedrehten System.



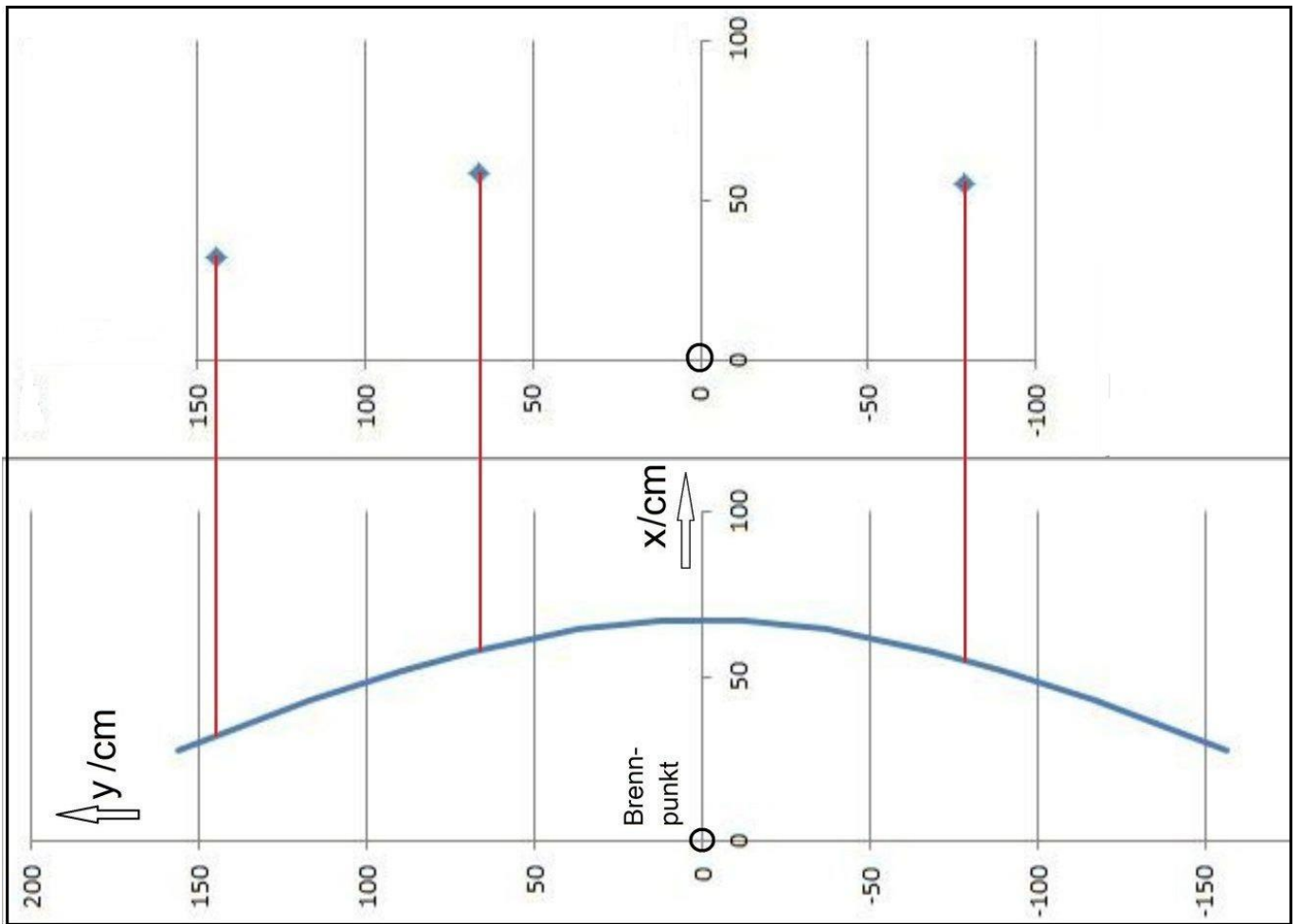
Das Maß der Verschiebung zwischen Fußpunkt B und Brennpunkt F wird mithilfe einer *Dandelinischen Kugel* bestimmt (Abb. links).

Diese liegt im Deklinationskegel innen und auf der Kegelschnitt-Ebene (Zifferblatt) im Brennpunkt der Schnittkurve (Hyperbel) an .

Mit den Vorgaben Gnomon-/Stabhöhe (70 cm) und Deklinationswinkel ($\vartheta = 17,5^\circ$) ergibt die Rechnung : 28,94 cm.

Mit den transformierten Lagedaten von zwei der drei vorgegebenen Schattenpunkte findet man die Parameter p und ε der Gl. (1): $p = 222,74 \text{ cm}$ $\varepsilon = 2,32$.

Die gesuchte Tageskurve lässt sich nun zeichnen (s. folgende Abb.)



Hyperbel-Kenngrößen a und b:

Ihre Abhängigkeiten von p und ε : $p = \frac{b^2}{a}$ $\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2} / a$

Mit $p = 222,74 \text{ cm}$ und $\varepsilon = 2,32$ folgt $a = 51,01 \text{ cm}$ $b = 106,59 \text{ cm}$

Anmerkungen:

1. Alle Rechenschritte lassen sich im Ausgabeblatt der Excel-Arbeit (zurück zur Hauptseite) verfolgen.
2. Da mit Excel Kurven nur aus Scharen von Punkten erstellt werden können, die mit x-y-Koordinaten codiert sind, mussten die polar (ε und r) codierten Punkte in kartesisch codierte Punkte zurückverwandelt werden.