

Die Zeitgleichung für Nicht-Astronomen

(DGC-Mitteilungen Nr.111, 2007)

Inhalt

1. Einleitung
2. Ein mechanisches Modell der kosmischen Uhr
3. Vorgehen
4. Heliozentrische Betrachtung
5. Übergang zu geozentrischer Betrachtung
6. Geozentrische Betrachtung, Zeitgleichung
7. Die Zeitgleichung über ein Jahr
8. Vergleich mit vereinfachenden Betrachtungen
9. Literatur
10. Anhänge

1. Einleitung

Die Zeitgleichung ist eine astronomische Aufgabe, die bereits von *Hipparch* behandelt wurde und im *Almagest* ziemlich genau und bündig angesprochen ist [6]. Daran wurde erst im 17. Jahrhundert angeknüpft, nämlich durch *Flamsteed*. Der in der Folgezeit erarbeitete Rechengang wird hier für Nicht-Astronomen aufbereitet. Das heißt vor allem, dass das entsprechende Insider-Wissen zum Verständnis nicht Voraussetzung ist. Als Bezeichnungen und Symbole werden die im entsprechenden Kapitel vom "Sonnenuhren Handbuch", DGC [1] gewählten verwendet, um beide Arbeiten leichter miteinander vergleichen zu können.

Kleine langfristige Einflüsse auf die Bahnfahrt der Erde werden unterdrückt, um das Wesentliche herauszuarbeiten. Die vorliegende Behandlung ist dennoch strenger als die Formulierung der Zeitgleichung als Summe von zwei mit dem Jahr bzw. seiner Hälfte periodischen Ausdrücken, mit je einem für die beiden Ursachen der Schwankung der Sonnenzeit [2]. Dort wird die Schwankung der Tageslänge ermittelt und daraus auf die Zeitgleichung geschlossen. Weil die Erddrehung um die eigene Achse, die den Hauptteil der Tageslänge zwar ausmacht, sehr gleichmäßig ist, tritt sie aber bei der vorliegenden Herleitung nicht direkt in Erscheinung.

Dass ausschließlich die Bahnfahrt der Erde um die Sonne zu untersuchen ist, soll auch eine mechanische Nachbildung der kosmischen Uhr zeigen.

2. Ein mechanisches Modell der kosmischen Uhr

Unsere mechanischen Uhren und Kalendarien sind Nachbildungen der grossen kosmischen Uhr mit der Sonne als Zeiger. Menschen der Moderne sind mechanische Uhren als "Zeitmacher" [3] inzwischen viel vertrauter als die (scheinbaren) Bewegungen der

Sonne. Deshalb seien die kosmischen Verhältnisse einmal umgekehrt mit Hilfe einer solchen Uhr erklärt.

Eine derartige Uhr (Abb.1) hat zwei Antriebe, die gemeinsam über ein Additionsgetriebe ("Differential") für die Drehung des Stundenzeigers auf einem 24-Stunden-Ziffernblatt ("Grosse" Uhr) sorgen. Der schnellere der beiden ist annähernd ein 24-Stunden-Antrieb (Tagestrieb, rechts in der Abbildung). Er allein dreht den Zeiger bereits an einem Sternentag (ca. 4min weniger als 24h) einmal herum. Das entspricht einer 360°-Drehung der Erde um ihre Achse. Der langsamere Antrieb erteilt dem Zeiger erst in ca. 365 Tagen (Jahrestrieb, links) eine ganze Drehung analog der jährlichen Bahnfahrt der Erde. Diese Drehung erfolgt zudem rückwärts. Zur Kompensation auf eine volle Zeigerdrehung vorwärts läuft der Tagestrieb ca. 1° pro Tag über 360° hinaus. Danach ist der Sonntag (24 Stunden) beendet.

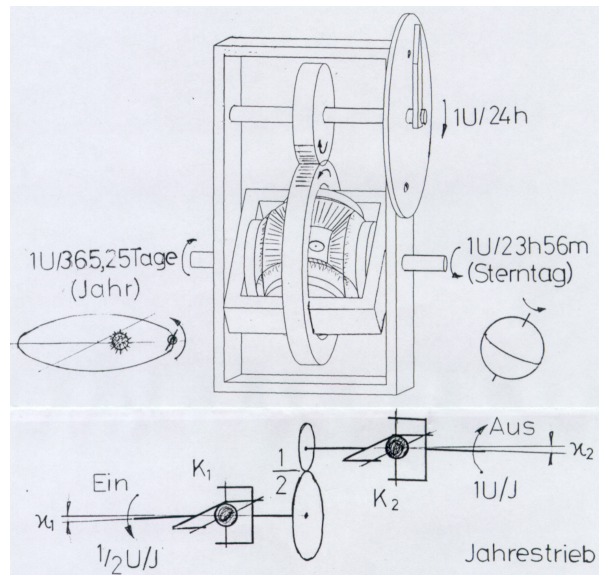


Abb.1 mechanisches Modell der kosmischen Uhr (unten: Jahrestrieb, schematisch)

Die der Erd-Drehung überlagerte Umrundung der Sonne durch die Erde macht das Ganze als modernen "Zeitmacher" unbrauchbar. Der Jahrestrieb des Modells beginnt mit einem Getriebe mit periodischem Übersetzungsfehler zur Nachbildung der Umrundung der Erdbahn, dem ein weiteres solches Getriebe nachgeschaltet ist, um die Schiefe der Ekliptik zu erfassen. Da Tages- und Jahresantrieb voneinander unabhängig sind, braucht nur letzterer einer Fehlerbetrachtung unterzogen werden. Ergebnis ist die Zeitgleichung. In Anhang 1 ist die Konstruktion des Jahrestriebs von Abb.1 näher erläutert. Die Reihenschaltung zweier Getriebe mit periodischem

Übersetzungsfehler passt zur Zeitgleichung, die mit zwei periodischen Ausdrücken angenähert ist [2].

3. Vorgehen

Zum Verständnis der Zusammenhänge, die zur Zeitgleichung führen, muss vom heliozentrischen Weltbild ausgegangen werden. Bei geozentrischer Betrachtung ist die erste Ursache, nämlich die Bahnfahrt der Erde auf einer Ellipse nicht erkennbar und quantitativ nicht beschreibbar. Mit Hilfe des 2. Kepler'schen Gesetzes (gleiche Flächen in gleichen Zeitintervallen) ist die Zeitfunktion des Ortes der Erde auf ihrer Bahn, die sogenannte wahre Anomalie zu gewinnen. Letztere ist nach dem Wechsel zu geozentrischer Betrachtung auf einfache Weise als ekliptikale Länge der Sonne in Abhängigkeit von der Zeit zu deuten. Der Systemwechsel bedeutet nämlich, dass die Sonne an die Stelle der Erde tritt.

Bei der Beobachtung der ekliptikalen Bewegung der Sonne von der Erde aus stört deren Drehung (Tagestrieb). Man muss sich die Erde angehalten denken oder sich gedanklich als Mitfahrer im drehenden Koordinatensystem der Ekliptik empfinden.

Der ekliptikalen Länge der Sonne entspricht im ebenfalls drehenden Koordinatensystem des Äquators ihre Rektaszension $\alpha(t)$, die die **Wahre Sonnen- oder Ortszeit** repräsentiert. Sie ist der Subtrahend in der Zeitgleichung, die wie folgt definiert ist:

$$(1) \text{ ZG}(t) = (4 \text{ min}/^\circ) (\alpha_M(t) - \alpha(t)) \text{ [min]} \text{ [1].}$$

Der Minuend ist $\alpha_M(t)$, die Rektaszension einer gedachten, gleichmässig übers Jahr auf dem Äquator umlaufenden Vergleichs-Sonne (sogenannte mittlere Sonne mit mittlerer Rektaszension), die die **Mittlere Sonnen- oder Ortszeit** repräsentiert. Bei einer Winkel-Differenz ($\alpha_M - \alpha$) von 360° hätte die Zeitgleichung einen Wert von 24 Stunden. 1° entspricht somit 4 Minuten.

Die Definition mit Ortszeiten ist $\text{ZG} = \text{WOZ} - \text{MOZ}$. Die Vorzeichen-Umkehr gegenüber (1) (α_M entspricht der mittleren Ortszeit MOZ, α der wahren WOZ) kommt von der unterschiedlichen Richtungswahl für Rektaszension α und Stundenwinkel τ (Maß für Ortszeiten).

Die ursprüngliche Definition enthielt die umgekehrte Differenz und lautete $\text{ZG} = \text{MOZ} - \text{WOZ}$. Darin ist die mittelalterliche Bedeutung vom heute noch gebrauchten Wortteil "-Gleichung" als "eine Korrektur zufügen" zu erkennen. Man hatte der wahren Sonnenzeit die Differenz zur mittleren Sonnenzeit hinzuzufügen, um zu letzterer zu gelangen: $\text{MOZ} = \text{WOZ} + \text{ZG}$ [7].

4. Heliozentrische Betrachtung (Abb.2)

Jahrestrieb der kosmischen Uhr ist vorerst die Erde. Zuerst wird deren elliptische Bahnfahrt (erste Ursache) verfolgt. Der Einfluss ihrer speziellen Achslage (zweite Ursache) wird später berücksichtigt. Mittelpunkt der Ellipse ist 0. In einem ihrer beiden Brenn-

punkte (B) befindet sich die Sonne. Perihel (P), Aphel (A) und Frühlingspunkt (F) sind annähernd fixe, besondere Bahnpunkte. X ist der Ort der Erde in einem bestimmten Moment t , ausgedrückt durch den Winkel wahre Anomalie $V(t)$. Die mittlere Erde (Pendanz zur mittleren Sonne) befindet sich bei Y, was mit der mittleren Anomalie $M(t)$ angegeben ist.

Im Allgemeinen wird mit $M(t)$ der **gleichmässige Ablauf der Zeit sichtbar** gemacht. Y ist somit die Spitze eines gleichmässig drehenden Zeigers (**Vektors**). Dieser dient sowohl für den Orts- als auch für den Zeitvergleich mit dem mit der wahren Erde (X) verbundenen Vektor, der nicht gleichmässig dreht. Die Drehung am Eingang des Jahrestriebs (Abb.1) ist wie $M(t)$ gleichmässig. Aus konstruktiven Gründen (Anhang 1) ist die Winkelgeschwindigkeit der Eingangs-Welle aber vorerst halbiert.

Beide Erden treffen sich auf ihrer gemeinsamen elliptischen Bahn im Perihel (P) und im Aphel (A). Die Passage von P ist als Beginn des anomalistischen Jahres J_{an} definiert. Deshalb ist P einer der Bezugspunkte in den folgenden Betrachtungen. Kurz vor P (bei K, 1. Januar) beginnt definitionsgemäss das Kalenderjahr.

Die mittlere Anomalie $M(t)$ ist definitionsgemäss eine lineare Funktion der Zeit t (Abb.2, links unten):

$$(2) M(t) = M_0 + (360^\circ/J_{an}) t.$$

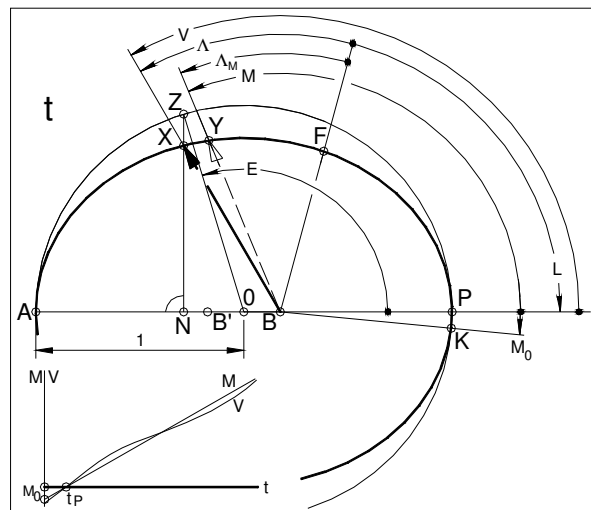


Abb.2 Erdbahn-Ellipse

Die Steigung ist $360^\circ/J_{an}$. Beim Perihel-Durchgang ist $M(t)=0$ definiert. Weil aber bei der Zeitgleichung (1) $t=0$ am 1. Januar, 12 Uhr gesetzt wird, ist M_0 (negativer Wert $!$) zu addieren. M_0 ist die Winkeldifferenz zwischen K und P. Diese Differenz ist eine Jahreskonstante, die sich vor allem innerhalb eines Schaltjahr-Zyklus' ändert. Die Veränderlichkeit ist aber nur von Bedeutung, wenn man die an sich "zeitlose" Zeitgleichung am Anfang eines späteren Jahres erneut startet.

Der Zusammenhang zwischen wahrer $V(t)$ und mittlerer $M(t)$ Anomalie wird nach einem Zwischenschritt

erkennbar, nämlich nach der Einschaltung der *Kepler'schen* Gleichung, der von *Kepler* selbst vorgenommenen mathematischen Formulierung seines 2. Gesetzes:

$$(3) M(t) = E(t) - (180^\circ/\pi)e \sin E(t); \text{ (Anhang 2).}$$

Dabei ist E ebenfalls eine Anomalie (mit der Zeit veränderlicher Winkel), nämlich die exzentrische. Man beachte, dass diese von O , dem Zentrum der Ellipse aus gemessen, dennoch von *Kepler* exzentrische Anomalie genannt wurde (Abb.2).

Gleichung (3) nach $E(t) = f(M(t))$ aufzulösen, ist in geschlossener Form nicht möglich. Es gelingt aber z.B. mit Hilfe des bekannten *Newton'schen* Näherungsverfahrens, das jener für diesen Zweck erfand, und das zu einem wichtigen Verfahren der numerischen Mathematik wurde.

$V(t) = f(E(t))$ ist dagegen ein einfacher geometrischer Zusammenhang innerhalb der Ellipse, wobei vom Mittel- (O) zum Brennpunkt (B) zurück gekehrt wird:

$$(4) \tan(V(t)/2) = \kappa \tan(E(t)/2); \text{ (Anhang 3).}$$

κ ist eine Ellipsen-Konstante, ausgedrückt mit der relativen (numerischen) Exzentrizität e der Ellipse:

$$\kappa = ((1+e)/(1-e))^{1/2}$$

Der Graph $V(t)$ deckt sich erwartungsgemäss nicht mit $M(t)$ (Abb.2, links unten).

Die erste Ursache der Zeitgleichung ist nunmehr erfasst.

5. Übergang zum geozentrischen Weltbild (Abb.3)

Abb.3 zeigt, was jeweils ein Sonnen- und ein Erdbewohner sehen kann. Die Beobachtungen beginnen beim Periheldurchgang der Erde. Von der Sonne aus sieht man die Erde nach links laufen, den Frühlingspunkt (F) passieren und die Orte Y und X zum Zeitpunkt t erreichen. Der bis X überstrichene Winkel ist $V = \Lambda - L$. (Abb.2, L hat negativen Wert !). Der Erdenbewohner sieht (bei angehalten gedachter Erddrehung) die gleiche Bewegung, nur sind ihr die wahre und die mittlere Sonne S' unterworfen. Diese laufen ebenfalls nach links über F hinaus bis zu den Punkten S' und S , die sie im Zeitpunkt t einnehmen. Die Winkelvergrößerung bis S ist wieder $\Lambda - L$. Anstatt den Ort der wahren Erde mit $V(t)$ auf das Perihel (P) zu beziehen, erfolgt der Bezug aus praktischen Gründen neu auf den Frühlingspunkt (F), was geozentrisch gesehen zur ekliptakalen Länge Λ der wahren Sonne führt:

$$(5) \Lambda(t) = V(t) + L(t)$$

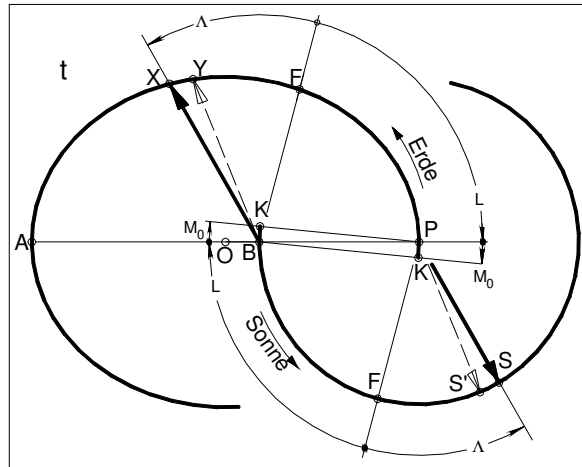


Abb.3 Erdbahn-Ellipse und Sonnenbahn-Ekliptik

Die Drehung $V(t)$ bzw. $\Lambda(t)$ wird vom kleineren Zahnrad des Jahrestriebs (Abb.1) (angenähert) nachgebildet.

$V(t)$ kommt aus Gleichung (4). $L(t)$ ist die ekliptikale Länge des Perihels, die sich schwach auch während des Jahres verändert. Das Perihel nähert sich dem Frühlingspunkt mit

$$(6) L(t) = L_0 + (pf/J_{tr}) t.$$

Das Zusammenrücken beträgt ca. $0,017^\circ/J_{tr}$. Es wird von der Präzession der Erdbachse und der Drehung der Apsidenlinie der Erdbahn verursacht. Deshalb ist das tropische Jahr J_{tr} etwas kürzer als das anomalistische J_{an} . Beide Jahrlängen sind in der Konstante pf wie folgt enthalten: $pf = 360^\circ(1 - J_{tr}/J_{an})$.

In Abb.3 ist die Sonnenbahn ausdrücklich als Kreis gezeichnet. Es handelt sich um die Ekliptik (s. auch Abb.4). Die drehenden Vektoren haben ihre Spitzen jetzt bei S und S' .

6. Geozentrische Betrachtung, Zeitgleichung (Abb.4)

Der "Ablauf" der Tageszeit wird hauptsächlich durch die Eigendrehung der Erde (Tagestrieb) verursacht, die auf dem Himmels-Äquator messbar ist, weshalb auch in der Zeitgleichung Bahnstücke des Himmels-Äquators zu verrechnen sind (zweite Ursache der Zeitgleichung).

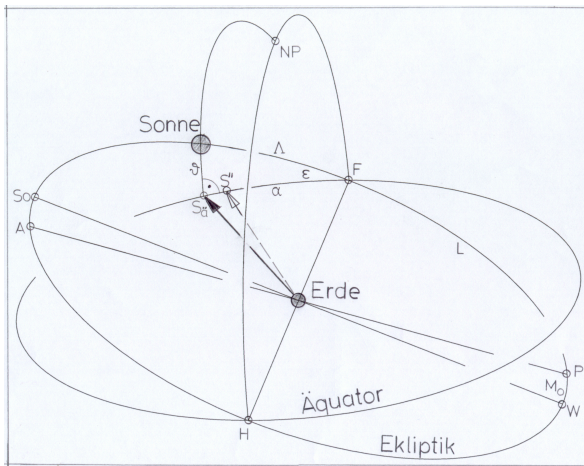


Abb.4 Ekliptik und Himmels-Äquator

Die wahre Sonne wird von der Ekliptik auf den Äquator "herunter geholt", aus ihrer ekliptikalen Länge Λ wird ihre Rektaszension α bestimmt. Der wahre Vektor hängt weiterhin an der wahren Sonne, dreht aber jetzt in der Äquatorebene und zeigt zu S_a . Seiner ungleichmässigen Drehung entspricht schliesslich (angenähert) die Drehung der Ausgangs-Welle im Jahrestrieb (Abb.1). Beigesellt ist in Abb.4 der Vergleichsvektor, der zu einer weiteren, einer zweiten **mittleren Sonne**, dem fiktiven Punkt S'' zeigt.

Die Umrechnung zwischen ekliptikalen und äquatorialen Koordinaten ist z.B. mit den bekannten Transformations-Gleichungen oder mit folgender einfachen Beziehung im rechtwinkligen sphärischen Dreieck Sonne| S_a |F möglich:

$$(7) \quad \alpha(t) = \arctan(\tan \Lambda(t) \cdot \cos \epsilon) .$$

Gleichung (7) liefert den Subtrahend von (1).

Der **Minuend** $\alpha_M(t)$ ist die Rektaszension der Bezugs-Sonne S'' , die auf dem Äquator gleichmässig umläuft und sich immer im Frühlingspunkt mit der Bezugssonne S' treffen soll:

$$(8) \quad \alpha_M(t) = \alpha_0 + (360^\circ/J_{tr}) t .$$

Die Konstante α_0 ist der Bogen, den der Vergleichsvektor zu S'' zwischen $t=0$ und dem Eintreffen am Frühlingspunkt zurück legt. Die Drehung des Vektors zu S' repräsentiert ebenfalls den gleichmässigen Ablauf der Zeit und legt folglich zwischen $t=0$ und dem Eintreffen am Frühlingspunkt den gleich grossen Bogen zurück, der für α_0 in Gleichung (8) eingesetzt werden kann: Für den Bogen von S' zwischen K ($t=0$) und F (Frühlingspunkt) lässt sich aus Abb.3 die Summe M_0+L ablesen. Darin ist $L=L_0$ die ekliptikale Länge des Perihels im Moment $t=0$ (Gleichung (6)). Also ist $\alpha_0 = M_0 + L_0$ und aus (8) wird:

$$(9) \quad \alpha_M(t) = M_0 + L_0 + (360^\circ/J_{tr}) t$$

mit $\alpha_M(t=0) = \alpha_0 = M_0 + L_0$. Zur Erinnerung: M_0 und L_0 haben negative Werte.

Die zweite Ursache der Zeitgleichung ist jetzt auch erfasst. Nachdem die Gleichungen (7) und (9) in Gleichung (1) eingesetzt worden sind, ist die Zeitgleichung in der gewünschten Strenge gefunden.

Die Einführung der fiktiven Sonne S'' war aus anschaulichen Gründen nötig, um Bahnstücke auf dem Himmels-Äquator gegeneinander verrechnen zu können, wie oben (Anfang des Abschnitts) gefordert wurde. Es zeigt sich aber, dass die Rechnung formal auch richtig ist, wenn man die Bewegung der fiktiven Sonne S' zum Vergleich heran zieht. Beide Sonnen passieren gemäß Vorgabe den Frühlingspunkt gleichzeitig, und als Repräsentanten des gleichmässigen Ablaufs der Zeit sind ihre Bewegungsgeschwindigkeiten grundsätzlich gleich gross. Es spielt wertmäßig keine Rolle, dass beide Sonnen auf unterschiedlichen Bahnen (S' auf der Ekliptik, S'' auf dem Äquator) laufen und ihre momentanen Winkel verschiedene Namen (ekliptikale Länge für S' , Rektaszension für S'') haben. Im Anhang 4 werden bisher verwendete Gleichungen zur Kontrolle diesbezüglich gegenüber gestellt und die Aussage kontrolliert, dass die Rektaszension der mittleren Sonne S'' zu jeder Zeit gleich der ekliptikalen Länge der mittleren Sonne S' ist [1].

Diese formale Gleichheit scheint Ursache dafür zu sein, dass die Rolle der mittleren Sonne beziehungsweise der mittleren Sonnen in der Literatur nicht einheitlich und deutlich beschrieben ist. Es gibt zum Beispiel die anschauliche Definition: "Die Differenz mittlere Sonnenzeit minus wahre Sonnenzeit oder Rektaszension der wahren Sonne minus **Rektaszension der mittleren Sonne** heisst Zeitgleichung" [4]. Die o.g. Aussage [1] spricht im Original auch von einer mittleren Sonne auf dem Äquator, nennt die auf der Ekliptik bewegte mittlere Sonne, von der die verwendete Bewegungsgleichung (mit **ekliptikaler Länge**) stammt, aber nur einen (fiktiven) Punkt.

7. Die Zeitgleichung über ein Jahr und mehr

Die Graphen von Minuend und Subtrahend der Zeitgleichung sind wie die beiden Linien in Abb.2 (links unten) stetig ansteigend, was auf den ersten Blick nicht auf eine Jahres-Periodizität hinweist. In der Gleichung ist t in Tagen einzusetzen. Sie beginnt im Zeitpunkt $t=0$ am 1. Januar 12^h mittags in dem Jahr, dessen Jahres-Konstanten M_0 und L_0 in ihr enthalten sind, und kann viele Jahre lang benutzt werden. Der Zeitpunkt $t=364$ (365 in einem Schaltjahr) ist der Mittag des 31. Dezember im ersten Jahr, $t=365$ (366) ist der 1. Januar des nächsten Jahres usw. Man kann die Gleichung für jeden t -Wert, also über Jahre hinweg benutzen. Die in den Abbildungen 5 und 6 in Näherung erkennbare Periodizität ist aber streng weder ans tropische Jahr J_{tr} noch ans anomalistische J_{an} gebunden. Wegen der Annäherung zwischen Frühlingspunkt und Perihel ändert sich die Kurvenform auch langfristig. Innerhalb einer Schaltjahrperiode sind die Werte von Kalenderjahr zu Kalenderjahr auf der Zeitachse 3 mal ca. 1/4 Tag vor-,

am Ende ca.3/4Tag zurück verschoben, was in der Jahreskonstante M_0 steckt. Im fünften Jahr ist die Kurve der vom ersten Jahr sehr ähnlich.

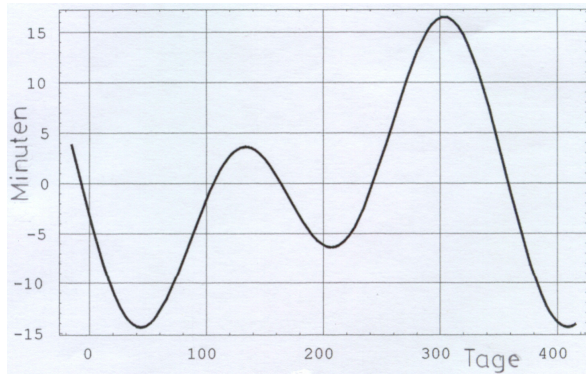


Abb.5 Zeitgleichung als Graph

Für wissenschaftlich/technische Anwendungen der Zeitgleichung, wozu ihr Gebrauch bei der Sonnenuhr nicht zählt, wird sie noch genauer als hier beschrieben berechnet. Die erste höheren Stufe ist die Ermittlung einer neuen Gleichung ab 1.Januar des nächsten Jahres mit Hilfe anderer Jahreskonstanten M_0 und L_0 und sich sehr langsam ändernden Werten für Jahreslängen J_{tr} und J_{an} , relative (numerische) Exzentrizität e der Erde und Schiefe der Ekliptik ϵ [1]. Dabei können die auf astronomischen Messungen beruhenden Prognosen in der Zwischenzeit verbessert worden sein (gilt auch für M_0 und L_0).



Abb.6 Sonnenuhr in Chur/CH

Zeitgleichung über 12 Monate und mit umgekehrten Vorzeichen gegenüber Abb.5 (alte Definition: s. 3.)

8. Vergleich mit vereinfachenden Betrachtungen

1. Ursache (elliptische Erdbahn):

Die ungleiche Bahngeschwindigkeit der Erde, beschrieben mit dem zweiten *Kepler'schen* Gesetz wird mit der *Kepler'schen* Gleichung (3) berücksichtigt, die in die Gleichung (4) für die wahre Anomalie der Erde eingeht. Die Zeitgleichung hätte folgende Gestalt, wenn die Sonne auf dem Himmels-Äquator umlief, nur die elliptische Form der tatsächlichen Erdbahn zu berücksichtigen wäre.

$$ZG_1(t) = (4 \text{ min/}^\circ) (M(t) - V(t)) \quad (\text{Abb.7}).$$

Dieser mit dem anomalistischen Jahr periodische Ausdruck hat seine Nullstellen in Perihel (P) und Aphel (A). Er ähnelt z.B. ZG1 in [2]. Die Amplitude ist hier 7,66min, dort 7,65min.

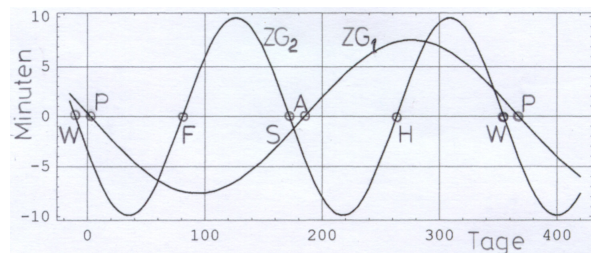


Abb.7 Zeitgleichung, getrennt in 2 Teil-Graphen

2. Ursache (Neigung der Erdachse):

Aus der wahren Anomalie der Erde wird mit Gleichung (5) die zugehörige ekliptikale Länge der wahren Sonne bestimmt. Die Bewertung des Ortes der wahren Sonne hat aber in Bezug auf den Himmelsäquator zu geschehen (Abschnitt 6, 1.Absatz). Mit Gleichung (7) wird die wahre Sonne auf den Äquator "herunter geholt", indem ihre Rektaszension bestimmt wird. Die Zeitgleichung hätte folgende Form, wenn die Erdbahn ein Kreis wäre, nur die Neigung der Erdachse berücksichtigt werden müsste.

$$ZG_2(t) = (4 \text{ min/}^\circ) (\alpha_M(t) - \alpha_S(t)) \quad (\text{Abb.7}).$$

$\alpha_S(t)$ ist die Rektaszension der ersten mittleren Sonne S' . Sie wird durch Einsetzen von $M(t)$ an Stelle von $V(t)$ in Gleichung (5) (mit $L(t)=L_0$) und Weiterrechnen mit Gleichung (7) ermittelt.

Der mit dem halben tropischen Jahr periodische Ausdruck ZG_2 hat seine Nullstellen annähernd in den Solstitionen (W und S) und in den Äquinoktien (F und H). Er ähnelt z.B. ZG2 in [2]. Seine Amplitude ist hier 9,86min, dort 9,83min.

Analog dem Vorgehen in [2] lassen sich auch die beiden Graphen aus Abb.7 addieren, um in Näherung (Anhang 5) den Graphen von Abb.5 zu finden.

9. Literatur

- [1] Deutsche Gesellschaft für Chronometrie: "Sonnenuhren Handbuch", 2006
- [2] S.Wetzel: "Eine elementare Behandlung der Zeitgleichung", DGC-Mitteilungen Nr.109
- [3] E.M.Fürböck: "Gedanken über das Wesen der Räderuhr", Schriften der Freunde alter Uhren, 1977
- [4] "Physikalisches Wörterbuch" (Herausgeber Wilhelm H. Westphal), Verlag Springer, 1952
- [5] S.Hildebrand: "Feinmechanische Bauelemente", Berlin und München, 1968
- [6] R.Wolf: "Handbuch der Astronomie", Amsterdam 1973

10. Anhänge

Anhang 1: Oszillierender Jahrestrieb (Abb.1)

Konstruktionsvorschlag, von einem gleichförmigen Antrieb (Motor) ausgehend:

Motor ($1U / 730,5\text{Tage} = \frac{1}{2} U / \text{Jahr}$) — Kreuzgelenk K_1 ("Kardangelen", Knickung der Achsen $\kappa_1=0,775^\circ$) — Rädergetriebe (Übersetzung 2:1 ins Schnelle $\rightarrow 1U / \text{Jahr}$) — Kreuzgelenk K_2 (Knickung $\kappa_2=1,242^\circ$) — [Additionsgetriebe]

Der durch Achs-Knickung entstehende periodische Übersetzungsfehler hat gegenüber der Achsendrehung doppelte Frequenz. Weil die Folge aus der 1.Ursache in der Zeitgleichung einfache Jahresfrequenz hat, wird mit halber Antriebsdrehzahl begonnen und nach dem 1.Kreuzgelenk eine 2:1-Übersetzung (ins Schnelle) eingeschoben. Die Folge aus der 2.Ursache hat doppelte Jahresfrequenz, wozu die Fehlerfrequenz des folgenden 2.Kreuzgelenkes jetzt passend ist. Die Knickung ist bei beiden Gelenken gleichsinnig, wodurch sich die Fehler addieren. Wegen der Zeitdifferenz zwischen Perihel- und Wintersolstitium-Durchgang der Erde befinden sich aber die beiden Gelenk-Knicke nicht genau in derselben Ebene. Die Knickwinkel sind sehr klein, die Präzision der Fertigung muss entsprechend hoch sein [5].

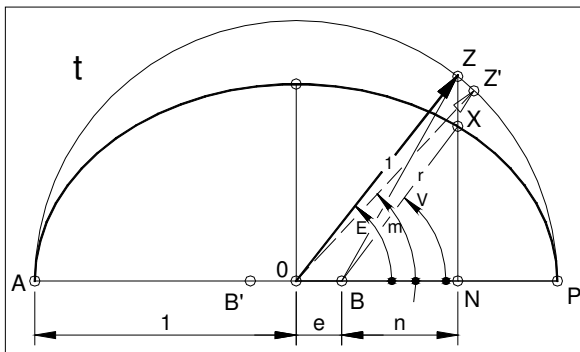


Abb.8 Ellipsen-Beziehungen

Anhang 2: Kepler'sche Gleichung (Abb.8)

Die *Kepler'sche* Gleichung (3) verknüpft die beiden Anomalien E und M miteinander, zeigt also die Abweichung zwischen dem gleichmässig drehenden Vektor Z' und dem zusätzlich oszillierendem Vektor Z an. Abb.8 enthält die Situation zu einem etwas früheren Zeitpunkt t und auf einer etwas flacheren Ellipse als Abb.2. Der Umkreis hat Einheits-Radius ($r=1$). Weil die mittlere Anomalie jetzt Bezugsgrösse zur exzentrischen ist, hat der Bezugszeiger seinen Drehpunkt auch in O. Die mittlere Anomalie wird hier $m(t)$ genannt, denn sie beginnt mit $t=0$ im Unterschied zu $M(t)$ bequemerweise im Perihel [6, Ziffer 486, b]. Das äussere Ende des Vektors m ist der fiktive Punkt Z' . Die Gleichung (3) ist wie folgt zu finden:

Bei der Bewegung der Erde von P nach X überstreicht der in B entspringende Fahrstrahl die Fläche XBP . Ihr entspricht auf dem Umkreis die Fläche ZBP , die mit der exzentrischen Anomalie E (ein Winkel) und der numerischen Exzentrizität e (eine Strecke) ausdrückbar ist: $F_{ZBP} = F_{ZOP} - F_{ZOB}$.

F_{ZOP} ist der Kreissektor $(\pi/360^\circ)E$,

F_{ZOB} die Dreiecksfläche $(e/2)\sin E$.

$F_{ZBP} = (\pi/360^\circ)E - (e/2)\sin E$.

Gemäß zweitem *Kepler'schem* Gesetz sind die Verhältnisse zwischen überfahrenen Flächen und zwischen den dazu benötigten Zeiten gleich.

Das steht in der Mitte des folgenden vierteiligen Ausdrucks:

$F_{ZBP}/F_{\text{Kreis}} = F_{XBP}/F_{\text{Ellipse}} = t/J_{\text{an}} = m/360^\circ$.

Der linke Teil enthält die Gleichheit entsprechender Flächenverhältnisse bei Ellipse und Umkreis, der rechte Teil die Gleichheit von Zeit- und Winkelverhältnis (oder: m als lineare Funktion der Zeit). Die Auswertung von erstem und letztem Bruch ergibt mit obigem F_{ZBP} und $F_{\text{Kreis}}=\pi$ unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit:

$m(t) = E(t) - (180^\circ/\pi)e \cdot \sin E(t)$.

Wird $t=0$ am Anfang des Kalenderjahres angenommen, so wird $M(t)$ aus $m(t)$. Die Zeitverschiebung ist in $M(t)$ mit M_0 berücksichtigt.

Die *Kepler'sche* Gleichung lautet somit

(3) $M(t) = E(t) - (180^\circ/\pi)e \cdot \sin E(t)$, qed.

Anhang 3: Von Anomalie E zu Anomalie V (Abb.8)

Die Polargleichung einer Ellipse mit Einheits-Umkreis, mit B als Pol, BP als Polarachse und V als Parameter lautet bekanntlich:

(10) $r = (1-e^2)/(1+e \cdot \cos V)$.

Die Strecke OB ist bei dieser Ellipse mit der relativen (numerischen) Exzentrizität identisch.

In anderer Schreibweise lautet die Polargleichung:

$$(11) r(1+e \cdot \cos V) = (1-e^2).$$

Weiter mit einer Fleissarbeit in mehreren Schritten:

$$\text{Dreieck ONZ: } e + n = \cos E,$$

$$\text{Dreieck BNX: } n = r \cdot \cos V, \text{ Eliminieren von } n:$$

$$(12) r \cdot \cos V = (\cos E - e),$$

$$(12) \text{ in } (11) \rightarrow (13) r = (1 - e \cdot \cos E),$$

$$(13) + (12) \rightarrow (14) r(1 + \cos V) = (1 - e)(1 + \cos E),$$

$$(13) - (12) \rightarrow (15) r(1 - \cos V) = (1 + e)(1 - \cos E),$$

$$(14)/(15) \rightarrow (16)$$

$$(1 + \cos V)/(1 - \cos V) = (1 - e)(1 + \cos E)/((1 + e)(1 - \cos E)).$$

Mit (2 Identitäten, s. in einer Formelsammlung)

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2) \text{ und } 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2(\alpha/2) \text{ zu:}$$

$$\sin^2(V/2)/\cos^2(V/2) = (1+e)/(1-e) \sin^2(E/2)/\cos^2(E/2),$$

$$(17) \tan(V/2) = ((1+e)/(1-e))^{1/2} \tan(E/2).$$

Unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit und mit κ für den Wurzelausdruck ist das Gleichung

$$(4) \tan(V(t)/2) = \kappa \tan(E(t)/2), \text{ qed.}$$

Anhang 4: ekliptikale Länge der mittleren Sonne S' gleich Rektaszension der mittleren Sonne S''

Die Verwendung von S' als Vergleichszeiger erinnert an die heliozentrische Wirklichkeit. S' repräsentiert Y, die fiktive Erde, deren ekliptikale Länge aus Abb.2 ablesbar ist:

$$(18) \Lambda(t) = L(t) + M(t).$$

Die vorhergesagte Gleichheit von (18) und (9) wird von nachfolgender Kontrolle bestätigt:

Mit den Gleichungen (6) und (2) wird Gleichung (18) zu (18a):

$$(18a) \Lambda(t) = L_0 + (pf/J_{tr}) \cdot t + M_0 + (360^\circ/J_{an}) t.$$

Mit $pf = 360^\circ(1 - J_{tr}/J_{an})$ (s.5.) entsteht Gleichung (18b), die mit Gleichung (9) identisch ist:

$$(18b) \Lambda(t) = L_0 + M_0 + (360^\circ/J_{tr}) t, \text{ qed.}$$

Anstatt (9) kann (18) als Minuend in Gleichung (1) verwendet werden, denn die ekliptikale Länge der mittleren Sonne S' ist zu jeder Zeit gleich der Rektaszension der mittleren Sonne S''.

Anhang 5: ZG₁+ZG₂, Länge der Jahreszeiten

Die Summanten ZG₁ und ZG₂ in [2] sind als einfache sin-Funktionen Näherungen, während ZG₁(t) und ZG₂(t) (s.Abb.7) mit den genannten Annahmen exakt berechnet sind. Die Summe letzterer ist dennoch nur eine Näherung an die Zeitgleichung (aber besser als in [2]), vor allem weil in ZG₂(t) die Abhängigkeit der Jahreszeit-Längen von der elliptischen Form der Erdbahn und der Differenz zwischen Perihel und Wintersonnenwende nicht berücksichtigt ist. Alle vier Jahreszeiten sind verschieden lang, was folgende Rechnung zeigt:

Setzt man in Gleichung (7) die α -Werte 0; ($\pi/2$); π ; ($3\pi/2$) und 2π ein und rechnet zurück, so findet man für t die Werte 78,8; 171,6; 265,2; 355 und 444 (Jahr 2008/09). Das ergibt für die Jahreszeiten folgende Längen:

92,8 Frühlings-,

93,6 Sommer-,

89,8 Herbst- und

89,0 Winter-Tage

Januar 2008 (März 11)

Siegfried Wetzel, CH 3400 Burgdorf,
S.Wet@gmx.net