



Berechnung der ebenen Sonnenuhr mit ebener und sphärischer Trigonometrie

(DGC-Mitteilungen Nr.106, 2006)

Bemerkung von heute (2007/08):

Die folgende Arbeit aus dem Jahre 2006 war wegen der in ihr enthaltenen Auseinandersetzung mit zwei einschlägigen Artikeln [1 und 1a] ursprünglich auch ein gedruckter "Leserbrief". Ich habe diesen Aspekt jetzt weggelassen und einen eigenständigen Artikel formuliert. Die damals übernommenen Namen und Formelzeichen habe ich aber beibehalten. Umgekehrt möchte ich auf einen "Leserbrief" zu meinem damaligen Artikel hinweisen:

R.Wieland, " Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Winkel der Stundenhalbgeraden auf einer beliebig orientierten ebenen Sonnenuhr" (DGC-Mitteilungen Nr.108, 2006).

Mehrdeutigkeiten mathematischer Lösungen, die ich mir erlaubte, weil technisch belanglos, werden in der Mathematik nicht toleriert. Diese Haltung wird verständlich bei Beachtung der Tatsache, dass die Sonnenuhr häufig als Übungsobjekt für Mathematik dient, was mir seit Beginn meines Interesses an Sonnenuhren auffällt [4].

Inhalt

1. Einleitung
2. Vorgehen
3. Mit sphärischer Trigonometrie gefundene Gleichungen für das allgemein positionierte Zifferblatt
4. Reduktion der allgemeinen Gleichungen für Zifferblätter in Sonderlagen
5. Mit ebener Trigonometrie gefundene Gleichungen
6. Paar-Bildung aus häufig getrennt behandelten Sonnenuhren: Streiflicht
7. Schlussbemerkung
8. Literatur

1. Einleitung

Die Berechnung der klassischen ebenen Sonnenuhren gelingt meistens schon mit Hilfe der ebenen Trigonometrie, wie z.B. die der Süduhr. Im allgemeinen Falle ist die Wand aber nicht genau nach Süden ausgerichtet (Drehung), und wenn noch eine (allerdings seltenere) Kippung zu berücksichtigen ist, wird vorteilhaft auf die sphärische Trigonometrie übergegangen, wenn man bei der trigonometrischen Mathematik bleiben will.

Ich behalte die Sonnenuhr im Vordergrund, und kann deshalb allfällige aus Formeln stammende Unsicherheiten (Mehrdeutigkeiten) vermeiden. Zudem zeige ich, dass die ebene Trigonometrie zur Beschreibung der meisten Sonnenuhren genügt. Bei Anwendung der sphärischen Trigonometrie zur Herleitung der letztlich zur Beschreibung nötigen End-Gleichungen, die auf dem Modell aus sphärischen Grosskreisen beruhen, kann ich mich durch konsequente Nut-

zung der bereits zur Verfügung stehenden Beziehungen relativ kurz fassen.

2. Vorgehen

Ich beginne mit der Berechnung des allgemein positionierten Zifferblattes (Abb.1) unter Anwendung sphärischer Geometrie. Die gesuchten Gleichungen lassen sich vorteilhaft mit Hilfe eines Modells (Abb.2) finden, das aus Grosskreisen besteht, die sich auf einer das Zifferblatt umhüllenden Himmelskugel befindenden. Mittelpunkt der Kugel ist der Fusspunkt F des Polstabes.

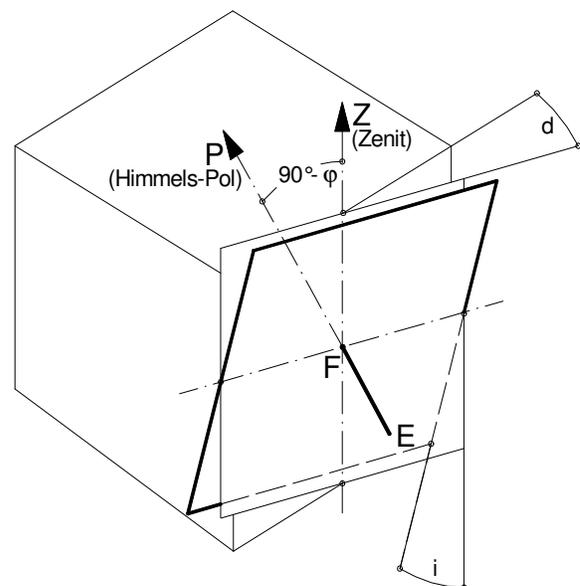


Abb.1 allgemein positionierte ebene Sonnenuhr mit Polstab

d = Drehung (Deklination), i = Kippung (Inklination)

Wird der Polstab kurz gehalten, so kann aus der Lage des Schattens seiner Spitze das Datum angezeigt werden. Die Polstab-Uhr wird auf diese Weise zu einer Gnomonischen Sonnenuhr (Kennzeichen: Punkt-Anzeige) erweitert.

Als ausgereiftes mathematisches Instrument liefert die sphärische Trigonometrie für fast jedes im sphärischen Dreieck zu bestimmende Stück eine eigene und relativ kurze Beziehung [5]. Ihre Verwendung macht die Herleitungen der wenigen wichtigen Gleichungen weitestgehend überflüssig.

Diese allgemein gültigen Gleichungen reduziere ich auf die der drei klassischen Sonnenuhren Äquatorial-, Horizontal- und Vertikal- (inkl. Wandabweichung) Uhr, um das Naheliegende zu machen, nämlich zu kontrollieren, ob die Resultate mit den gängigen Formeln, die ich beispielsweise *Zenkert's* Sonnenuhrenbuch [2] entnehme, übereinstimmen.

Danach zeige ich, dass die klassischen Sonnenuhren, sogar die Wanduhr mit Abweichung, bei erträglichem Aufwand noch mit ebener Trigonometrie beschreibbar sind.

Bei Streiflicht erfolgt der Übergang der Anzeige zwischen Süd- und Norduhr und ähnlichen Paaren. Für diesen Moment gebe ich eine Gleichung an, wodurch auf die getrennte Behandlung der „zwei Seiten der ein- und derselben Medaille“ verzichtbar ist, und sich die Berechnungs-Arbeit verringert.

Zum Schluss erwähne ich die Problematik der Anschaulichkeit, wenn mit nur einem Formelsatz die grosse Vielfalt unter den Sonnenuhren behandelt wird.

3. Mit sphärischer Trigonometrie gefundene Gleichungen für das allgemein positionierte Zifferblatt

Die 4 Grosskreise im Modell von Abb.2 sind die des Zifferblattes (Punkte S, R und Q), des Meridians (P=Himmels-Pol, Z=Zenit und Q), der Sonnen-Stundenebene (P und S) und der Kippung des Zifferblattes (Z und R).

Dreieck ZRQ enthält $(i-90^\circ)$ anstatt i , um mit der Arbeit [1] vergleichbar zu bleiben. Damit stellt das Zifferblatt der Horizontaluhr die Nulllage dar, nicht das an sich passendere der Vertikaluhr (enthält den Punkt Z). Der Weg zum allgemein positionierten Zifferblatt beginnt beim vertikalen Zifferblatt, das zuerst gedreht (Winkel d) und dann gekippt (Winkel i bzw. $i-90^\circ$) wird und ist in Abb.1 dargestellt.

Nach erfolgter Wahl oder Ermittlung der Drehung (Deklination d) und der Kippung (Inklination i) ist das Zifferblatt „fix“. Es ist zweckmässig, diese konstanten Winkel nicht in die Endgleichungen aufzunehmen. Die Gleichungen werden erheblich kürzer, wenn sie statt dessen die Substitute z_{fix} , ω und ψ enthalten, die mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks ZQR ein für alle mal vorausberechnet werden.

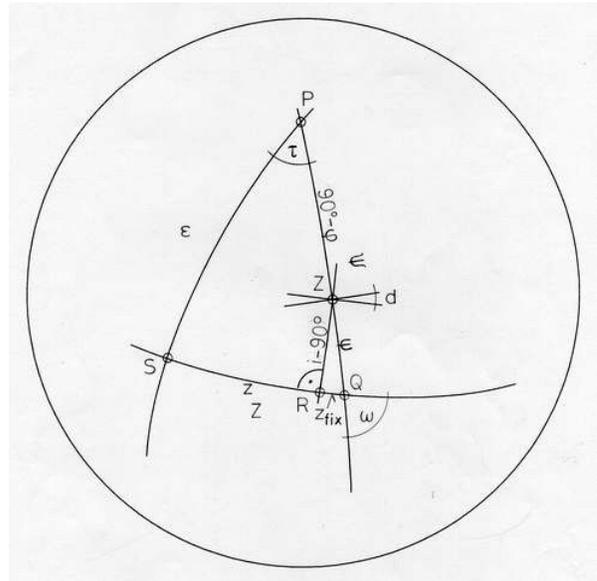


Abb.2 zwei sphärische Dreiecke auf einer Himmelskugel

Die Substitutionsgleichungen lauten wie folgt:

- (1) $\tan z_{\text{fix}} = \tan d \sin(i-90^\circ)$,
- (2) $\cos \omega = \sin d \cos(i-90^\circ)$,
- (3) $\tan \psi = \tan(i-90^\circ) / \cos d$.

Es handelt sich um jeweils eine von 10 möglichen direkt zum Ziele führenden Grundgleichungen im rechtwinkligen sphärischen Dreieck.

Für die Zifferblatt-Skalierung der Polstabuhr wird der Zifferblatt-Stundenwinkel z (nicht mit dem Stundenwinkel τ der Sonne zu verwechseln) benötigt. Er ist im allgemeinen sphärischen Dreieck PSQ mit Hilfe des Cotangenssatzes ablesbar. Mit den weiteren Substitutionen $z+z_{\text{fix}}=Z$ und $\Psi=\psi+(90^\circ-\varphi)$ lässt sich seine Gleichung wie folgt angeben:

$$(4) \tan Z = \sin \Psi / (\cot \tau \sin \omega + \cos \omega \cos \Psi).$$

Für die Gnomonische Sonnenuhr, die mit einem Schatten-Punkt neben der Tagesstunde auch das Datum anzeigt, sind Datumslinien zu ermitteln. Ist der Schatten-werfende Punkt die Spitze des Polstabes, so berechnet man zunächst den sogenannten Schattenwinkel ϵ (nicht mit $\epsilon =$ Schräge der Erdachse zu verwechseln). Dabei handelt es sich um den Raumwinkel zwischen

der Schattenlinie des Polstabes auf dem Zifferblatt und ihm selbst (s. Abb.3). Er ist nur Funktion der Substitute und des Stundenwinkels τ , nicht der Deklination δ . Eine andere der sechs Gleichungen des Cotangens-Satzes drückt auch hier das Gesuchte aus:

$$(5) \tan \epsilon = \sin \Psi / (\sin \tau \cot \omega + \cos \tau \cos \Psi).$$

Mit dem Seiten-Cosinus-Satz findet man zu:

$$(5a) \cos \epsilon = \cos \Psi \cos Z + \sin \Psi \sin Z \cos \omega.$$

Mit dem Schattenwinkel ϵ findet man die Länge des Polstab-Schattens im ebenen Dreieck zwischen F (Fusspunkt des Stabes), E (Stabspitze) und E' (Schatten-Punkt der Stabspitze)

$$(6) l' = l \cos \delta / \cos(\delta + \epsilon).$$

Jeder Punkt E' einer Datumslinie ist mit dem Stundenlinien-Winkel z und der Schattenlänge l' bestimmt. Für einen Tag (ein Datum) wird die Sonnendeklination δ als konstant angenommen. Tagesvariable ist der Stundenwinkel τ ($l' = f(\epsilon = f(\tau))$).

(6) ist übrigens eine mit ebener Trigonometrie (Sinus-Satz) formulierte Gleichung.

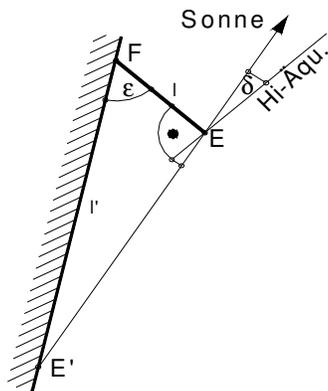


Abb.3 Schatten-Dreieck

4. Reduktion der allgemeinen Gleichungen für Zifferblätter in Sonderlagen

Die Anwendung der Gleichungen (4) und (5) auf die Zifferblätter in Sonderlage führt nicht nur auf die „niedere“ Stufe ebene Trigonometrie zurück, sondern sie erlaubt auch die Kontrolle der Gleichungen, da sich die Reduktionen mit den für die Sonderfälle bekannten, z.B. in [2] angeführten Formeln decken müssen.

4.1 Äquatoriale Sonnenuhr

Sie ist Nord/Süd-orientiert, also nicht gedreht ($d=0$), aber gekippt. Es gibt zwei Zifferblätter (das obere für das Sommerhalbjahr, das untere für den Winter), folglich existieren auch zwei Neigungswinkel.

unteres Zifferblatt: $i=(90^\circ+\varphi)$ bzw. $(i-90^\circ)=\varphi$. (1) bis (3) führen zu $z_{\text{fix}}=0$, $\omega=90^\circ$, $\psi=\varphi$ und $\Psi=90^\circ$ ($\Psi=\psi+(90^\circ-\varphi)$).

Wegen $z_{\text{fix}}=0$ ist $Z=z$, und Gleichung (4) lautet: $\tan z = 1/\cot \tau = \tan \tau$.

Folglich ist $z = \tau$.

oberes Zifferblatt: $i=-(90^\circ-\varphi)$ bzw. $(i-90^\circ)=-(180-\varphi)$.

(1) bis (3) führen zu $z_{\text{fix}}=0$, $\omega=90^\circ$, aber zu $\psi=-180^\circ+\varphi$ und $\Psi=-90^\circ$.

Gleichung (4) lautet jetzt:

$$\tan z = -1/\cot \tau = -\tan \tau.$$

Folglich ist $z = -\tau$.

Kontrolle: Der Drehsinn auf Ober- und Unterseite ist umgekehrt, was der Beobachtung entspricht. In [2] auf Seite 49 steht: $z = \tau$. Für oben und unten wird kein Unterschied gemacht, der Leser weiss, in welcher Richtung er vorwärts zu skalieren hat.

Reduktion der Gleichung (5) des Schattenlinienwinkels führt in beiden Fällen zum selben Ergebnis:

$$\tan \epsilon = 1/0 = \infty \text{ oder } \epsilon = 90^\circ.$$

Kontrolle: Der Polstab steht senkrecht auf dem äquatorialen Zifferblatt, wie bekannt.

4.2 Horizontale Sonnenuhr

Für die Drehung ist fraglos $d=0$ zu setzen (Drehung um die Normale ist nicht relevant). Die Inklination ist (s. Abschnitt 3, 2. Absatz): $i=0$ bzw. $(i-90^\circ)=-90^\circ$.

(1) bis (3) liefern: $z_{\text{fix}}=0$, $\omega=90^\circ$, $\psi=-90^\circ$ und $\Psi=-\varphi$ ($\Psi=\psi+(90^\circ-\varphi)$).

Wegen $z_{\text{fix}}=0$ ist auch hier $Z=z$, und Gleichung (4) lautet:

$$\tan z = \sin(-\varphi)/\cot \tau \text{ oder } \tan z = -\sin \varphi \tan \tau.$$

Kontrolle: Der Drehsinn ist der des Uhrzeigers (wie oben auf der äquatorialen Sonnenuhr), also entsprechend der Beobachtung mathematisch negativ. In [2] auf Seite 49 fehlt das Minuszeichen, wie schon gewohnt.

Für den Schattenlinienwinkel ergibt sich mit (5) folgendes:

$$\tan \epsilon = \sin(180^\circ-\varphi)/\cos \tau \cos(180^\circ-\varphi)$$

$$\text{oder } \tan \epsilon = -\tan \varphi / \cos \tau.$$

Kontrolle: Für $\tau=0$ ist $g \equiv \epsilon = -\varphi$. Der Polstab schneidet das Zifferblatt im Winkel φ , wie bekannt. Das Minuszeichen kann in der Praxis ignoriert werden.

Mit (5a) ist der Schattenlinienwinkel:

$$\cos \epsilon = -\cos \varphi \cos Z.$$

Kontrolle: In [2] auf Seite 115 fehlt wieder nur das Minuszeichen.

4.3 Vertikale Sonnenuhr

4.3.1 Süduhr

Die vertikale Süduhr ist dem Namen nach weder gedreht ($d=0$) noch geneigt, d.h. $(i-90^\circ)=0$. Umgekehrt: Man stellt sich die Entstehung einer Uhr in allgemeiner Lage durch Drehen und Kippen der Süduhr vor (s.Abb.1).

Aus (1) bis (3) folgt:

$z_{\text{fix}}=0$, $\omega=90^\circ$, $\psi=0$ und $\Psi=90^\circ-\varphi$ ($\Psi=\psi+(90^\circ-\varphi)$).
Wegen $z_{\text{fix}}=0$ ist wieder $Z=z$, und Gleichung (4) lautet:

$$\tan z = \sin(90^\circ-\varphi)/\cot\tau \text{ oder } \mathbf{\tan z = \cos\varphi \tan\tau}.$$

Kontrolle: identisches Ergebnis in [2], Seite 54.

Für den Schattenlinienwinkel folgt aus (5) die folgende Vereinfachung:

$$\tan\epsilon = \sin(90^\circ-\varphi)/(\cos\tau\cos(90^\circ-\varphi)) \\ = \tan(90^\circ-\varphi)/\cos\tau$$

$$\text{oder } \mathbf{\tan \epsilon = \cot\varphi / \cos\tau}.$$

Kontrolle: Für $\tau=0$ ist $\tan\epsilon=\cot\varphi$ bzw. $\epsilon=(90^\circ-\varphi)$.
Der Polstab schneidet das Zifferblatt im Winkel $(90^\circ-\varphi)$, wie bekannt.

Schattenlinienwinkel nach (5a):

$$\mathbf{\cos\epsilon = \sin\varphi \cos z}.$$

Kontrolle: identisches Ergebnis in [2], Seite 115.

4.3 Vertikale Sonnenuhr

4.3.2 Vertikale Sonnenuhr mit Wandabweichung d

Wandabweichung oder kurz Abweichung ist ein weiterer Begriff für die Eigenschaft Drehung. Die gedrehte Wanduhr ist die häufigste Sonnenuhr, denn die Gratis-Zifferblattebene Hauswand ist meistens nicht genau Süd-orientiert, in der Regel aber vertikal ($(i-90^\circ)=0$).

(1) bis (3) ergeben: $z_{\text{fix}}=0$, $\omega=(90^\circ-d)$, $\psi=0$ und $\Psi=90^\circ-\varphi$ ($\Psi=\psi+(90^\circ-\varphi)$).

Wegen $z_{\text{fix}}=0$ ist wie bisher $Z=z$, und Gleichung (4) lautet:

$$\tan z = \sin(90^\circ-\varphi) / \\ (\cot\tau\sin(90^\circ-d) + \cos(90^\circ-d)\cos(90^\circ-\varphi)) \\ \text{oder } \mathbf{\tan z = \cos\varphi / (\cot\tau\cos d + \sin d \sin\varphi)}.$$

Kontrolle: In [2] steht auf Seite 62:

$$\tan z = \cos\varphi / (\pm \cot\tau\cos d + \sin d \sin\varphi).$$

Weil der Autor bei den Winkeln z und τ nicht mittels Vorzeichen zwischen Ost und West (Vormittag und Nachmittag) unterscheidet, dem Leser aber eine Hilfe für richtiges Deuten der jetzt unsymmetrischen Verhältnisse geben will, setzt er im Nenner das \pm mit Hinweis, dass mit $+\cot\tau\cos d$ die Stundenlinien auf der ihm bekannten Substilarseite entstehen (und umgekehrt).

Für den Schattenlinienwinkel wird (5) wie folgend einfacher:

$$\tan\epsilon = \sin(90^\circ-\varphi) / (\sin\tau\cot(90^\circ-d) + \cos\tau\cos(90^\circ-\varphi))$$

$$\text{oder } \mathbf{\tan\epsilon = \cos\varphi / (\sin\tau\tan d + \cos\tau\sin\varphi)}.$$

Kontrolle: keine Literaturangabe vorhanden.

Aus (5a) heisst es für den Schattenlinienwinkel:

$$\mathbf{\cos\epsilon = \sin\varphi\cos z + \cos\varphi\sin z \sin d}.$$

Kontrolle: siehe [2], Seite 115; dort steht am Ende $\sin(\pm d)$, das ähnlich wie vorher kommentiert wird.

4.4 Polaruhr

Das vorliegende sphärische Modell ist nicht anwendbar, da der Polstab in der Zifferblattebene liegt und somit keinen Schatten wirft, oder weil im parallelen Stab einer funktionierenden Uhr der Sphärenmittelpunkt nicht enthalten ist.

Rein formal betrachtet führt Abb.2 zu folgendem: Der Zifferblatt-Grosskreis enthält die Himmelsachse. Mit dem Ortsmeridian bildet er ein Zweieck, dessen Ecken die beiden Himmelspole sind. Ausser dem Öffnungswinkel ist darin nichts erkennbar, was hilfreich wäre. Dieser Winkel ist der Stundenwinkel der Sonne im Moment des Beginns (westliche Uhr) oder des Endes (östliche Uhr) der Anzeige. Die beiden Dreiecke, die zur Skalierung aller bisher besprochenen Sonnenuhren gebraucht wurden, sind verschwunden.

5. Mit ebener Trigonometrie gefundene Gleichungen

Zenkert [2] wurde stellvertretend für viele Autoren, die die Gleichungen für die Zifferblätter in Sonderlage angeben, zitiert. Er gibt eine zusammenfassende Darstellung, die Herleitungen fehlen aber. Es ist zu zeigen, dass das mit ebener Trigonometrie möglich ist und wohl auch so gemacht wurde.

Für horizontale Sonnenuhren gibt es die bekannte **Grundgleichung** (s.4.2):

$$\mathbf{(a) \tan z = \sin\varphi \tan\tau}.$$

Für die Vertikaluhr lautet sie (s.4.3.1):

$$\mathbf{(b) \tan z = \cos\varphi \tan\tau}.$$

Für die Herleitung des Stundenlinienwinkels der **Vertikaluhr mit Abweichung** benutze ich die zahlreichen ebenen Dreiecke in Abb.4.

Es handelt sich um die parallele Projektion eines äquatorialen Zifferblattes (Kreis um Polstabspitze) in Pol-Richtung, die die abweichende Wand doppelt schräg trifft. Die linke Hälfte in

der Abbildung ist noch eine reine Südwand, relativ zu ihr ist die Westabweichung d der rechten Hälfte, der eigentlichen Wand zu erkennen. Am Knick befindet sich der Polstab. Er ist das Dach eines Tetraeders. Im Inneren befindet sich ein fünftes zur Erklärung nötiges Dreieck: *horizontales* Dreieck, das die Polstabspitze wie ein oft angewendetes Zweibein hält. Die anderen sind das *südliche* Dreieck und das *abwei-*

chende Stützdreieck mit den Erhebungswinkeln $(90^\circ - \varphi)$ bzw. g , deren je eine Kante der Polstab ist. Das *Wand-* Dreieck enthält den Substilarwinkel f , das *äquatoriale* Dreieck zeigt die substilare Stundenwinkel-Differenz τ_{sub} , die zunächst zu berechnen ist.

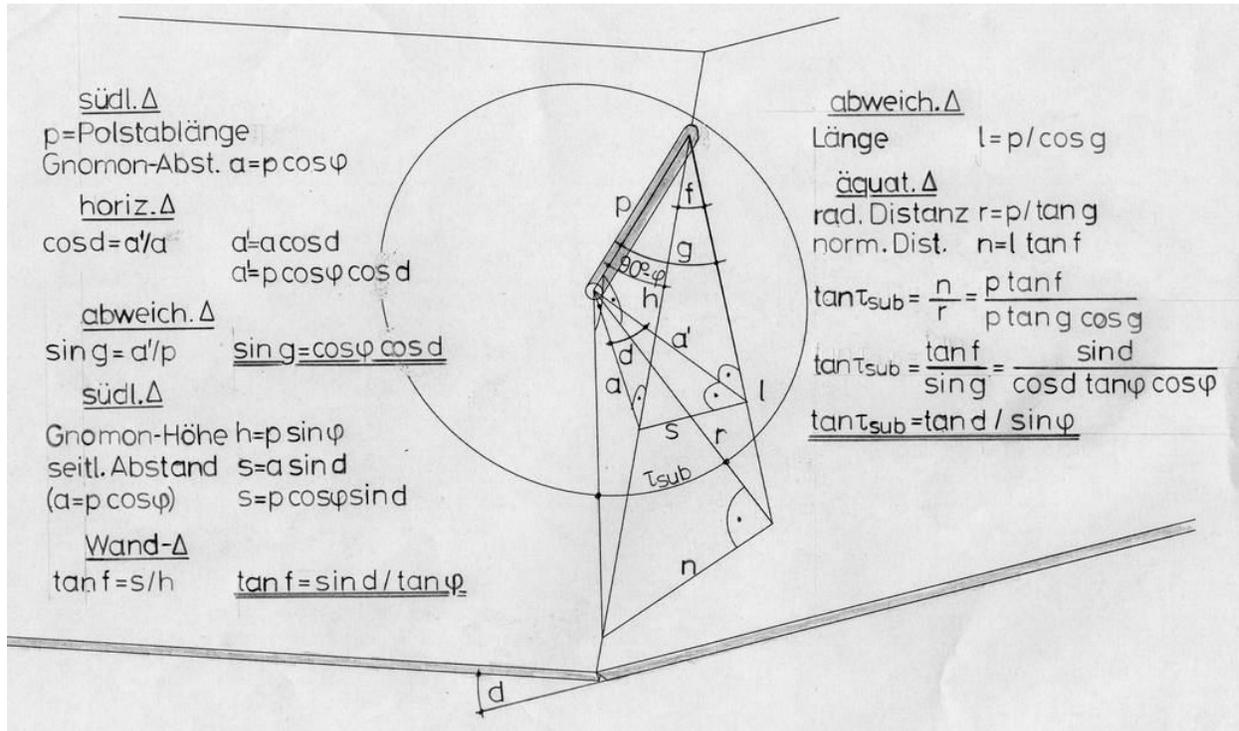


Abb.4 West-abweichende Wanduhr, aus Äquatoruhr abgeleitet

Der Weg von den Vorgaben φ (Breite) und d (Drehung) zu den Gleichungen für g (Erhebung), f (Substilarwinkel) und τ_{sub} (Stundenwinkel-Differenz) ist in der Abb.2 selbst aufgeschrieben. Das jeweils betroffene Dreieck ist mit seinem oben *kursiv* geschriebenen Namen erwähnt.

In Analogie zu $\tan z = \cos \varphi \tan \tau$ bei der Südwand-Uhr (s. Gleichung (b)) lässt sich schreiben:

(c) $\tan z = \sin g \tan (\tau + \tau_{\text{sub}})$.

$\sin g$ ist der allgemeinere Ausdruck; bei der Süduhr ist mit $g = (90^\circ - \varphi)$ daraus $\sin (90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$ geworden. Ebenso ist $\tan(\tau + \tau_{\text{sub}})$ allgemeiner formuliert; bei der Süduhr ist der Offset $\tau_{\text{sub}} = 0$.

In Worten ausgedrückt bedeuten diese beiden Veränderungen folgendes:
 Durch die Abweichung (Drehung d) wird der Winkel zwischen Wand und einem sich auf dem äquatorialen Zifferblatt stehend zu denkenden

Zylinder kleiner. Die die Wand zuerst treffende Mantellinie ist eine andere. Der Zylinder hat sich diesbezüglich um τ_{sub} bzw. f (auch Drehwinkel genannt) gedreht. Am Offset τ_{sub} (auch Symmetriewinkel genannt) ist zu erkennen, dass die Stundenlinien z weiterhin ein symmetrisches Bild darstellen, das nur um den Substilarwinkel f verdreht ist.

Ich verzichte auf die Fleissarbeiten, Gleichung (c) (s. auch [2], Seite 67) in die in Abschnitt 4.3.2 erhaltene Form umzuwandeln und die Schattenlinienwinkel-Gleichung auch noch „eben“ herzuleiten. Der in Abb.2 erkennbare Aufwand zeigt, dass die Grenze für den vorteilhaften Übergang zur sphärischen Trigonometrie, deren einfache Handhabung ich beschrieben habe, erreicht ist.

6. Paar-Bildung aus oft getrennt behandelten Sonnenuhren: Streiflicht

Beim allgemein orientierten Zifferblatt sind ein oder zwei Stundenwinkel $\tau_{1,2}$ möglich, bei denen es streifend beleuchtet ist. Existieren beide,

wird vor dem ersten Zeitpunkt und nach dem zweiten die Rückseite beleuchtet.

Für die vertikale Süduhr gibt es beide Momente, aber nur im Sommerhalbjahr. Im Winter wird sie wegen der südlichen Morgen-/Abend-Weite bei Sonnenauf- und -untergang schon bzw. noch mit nennenswertem Einfallswinkel getroffen, ihr Pendant, die Norduhr bleibt ganztägig ausser Betrieb [2],[3].

Süd- und Norduhr bilden ein Paar, das gemeinsam behandelt werden kann.

Streiflichtmomente gibt es auch bei anderen Standard-Sonnenuhren, so dass man in jeder dieser Einzeluhr ein Paar sehen kann.

Bei der **Äquatorialuhr** wechselt die Beleuchtung zwischen Ober- und Unterseite an den Äquinoktialtagen ($\delta=0$). Beide Seiten dieser Uhr werden gelegentlich getrennt als "zwei Seiten ein und derselben Medaille" behandelt (s. Abschnitt 4.1).

Bei Polaruhren wechselt die Beleuchtung unabhängig von der Jahreszeit (δ beliebig) einmal täglich immer zur gleichen Zeit. Beim Paar **polare Ost-/West-Uhr** ist $\tau_{1,2}=0$ (wahrer Mittag).

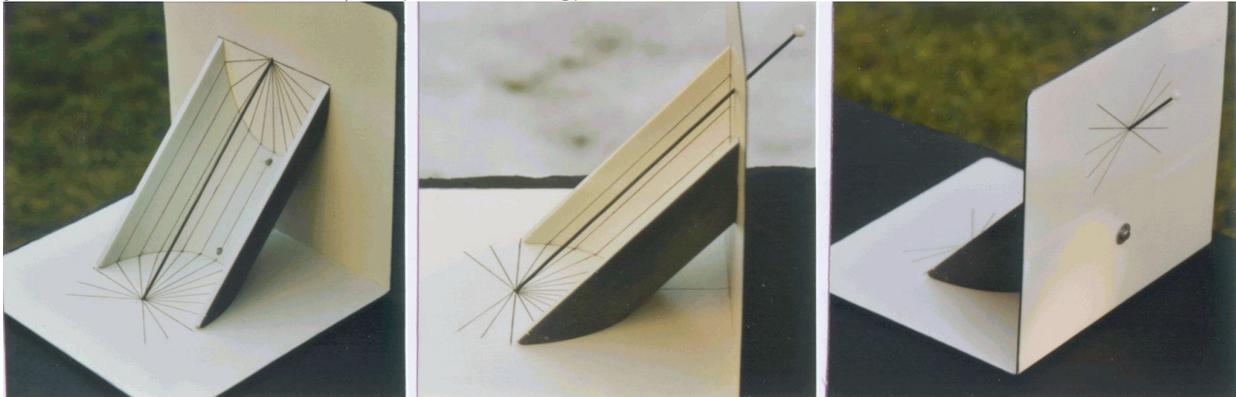


Abb.5 Modell mit dem Paar Süd/Nord-Uhr und weiteren klassischen Sonnenuhren

In [2] werden **vertikale Süd- und Norduhr** bereits als Paar behandelt und der Hinweis gegeben, dass die Stundenlinienformel der Süduhr auch für die Norduhr benutzt werden kann. Ich füge hier ein Foto einer solchen Doppel-Uhr ein (Abb.5: Modell, das ausserdem noch eine horizontale und eine zylindrische Äquatorial-Sonnenuhr enthält).

Die Streiflicht-Gleichung für diesen Sonderfall steht in [3]. Die Gleichung für das **allgemein positionierte ebene Zifferblatt** fehlt aber dort. Ich entwickle sie jetzt und benutze sie für ein Zifferblatt-Beispiel aus [1].

Der Winkel bei E' im ebenen Dreieck FEE' (Abb.3) wird bei Streiflicht zu Null: $90^\circ - (\delta + \epsilon) = 0$; daraus wird: $\epsilon_s = 90^\circ - \delta$.

Im übrigen entzieht sie sich der vorliegenden Betrachtungsweise (s. Abschnitt 4.4).

Bei der **Horizontaluhr** wird die Unterseite niemals, die Oberseite während des lichten Tages immer beleuchtet. Ausser sie befände sich im Weltraum z.B. auf einem geostationären Satelliten, dann wäre von einem Paar zu sprechen.

Es ist zu betonen, dass mit dem angewendeten Grosskreis-Modell (Abb.2) beim Stundenlinienwinkel z gar nicht zwischen den beiden Seiten der Zifferblattebene unterschieden werden kann. Der Winkel z erscheint am Rand als Grosskreisbogen. Mit Hilfe der noch zu findenden Streiflicht-Gleichung lässt sich entscheiden, welche der beiden Seiten für welche Werte z zu skalieren ist. Bei Streiflicht endet die Beleuchtung auf der einen und beginnt auf der anderen Seite. Die Sonderfälle Äquatorial-, Horizontal- und Polaruhr machen keine Probleme bzw. sind eindeutig. Die Streiflicht-Gleichung ist dafür nicht erforderlich. Sie wäre hier nur auf Widerspruchsfreiheit zu prüfen. Nötig und nützlich ist sie aber für die vertikale Uhr mit Drehung und Kippung.

Dieser konstante Wert wird in Gleichung (5) eingesetzt, die dann nach τ aufgelöst zu den beiden Winkeln $\tau_{1,2}$ führt. Weil zwei Lösungen erwartet werden, unabhängig davon, ob beide oder auch nur eine davon brauchbar ist, ist die τ -Auflösung von (5) eine quadratische Gleichung, was den zu beschreitenden mathematischen Arbeitsweg vorzeichnet.

Gl.(5) umgeschrieben:

$$\cos \omega \sin \tau + \cos \Psi \cos \tau = \sin \Psi \cot \epsilon_s,$$

mit Konstanten a, b und c: $a \sin \tau + b \cos \tau = c$.

Jetzt wäre eine der beiden Winkelfunktionen von τ in die andere umzuformen. Die Entscheidung lautet aber, beide zum Tangens zu machen. Aus dem \arcsin wäre nicht ersichtlich, ob

der Winkel kleiner oder grösser als 90° ist. Bei \arccos würde nicht erkennbar sein, welcher der beiden der negative Winkel ist.

Beziehungen mit Tangens:

$$\sin \tau = \tan \tau / (1 + \tan^2 \tau)^{1/2}, \quad \cos \tau = 1 / (1 + \tan^2 \tau)^{1/2}.$$

eingesetzt und geordnet:

$$a \tan \tau + b = c(1 + \tan^2 \tau)^{1/2}$$

$$\text{quadriert: } a^2 \tan^2 \tau + 2ab \tan \tau + b^2 = c^2 + c^2 \tan^2 \tau.$$

$$\text{geordnet: } (a^2 - c^2) \tan^2 \tau + 2ab \tan \tau + (b^2 - c^2) = 0.$$

nochmals geordnet:

$$\tan^2 \tau + (2ab / (a^2 - c^2)) \tan \tau + (b^2 - c^2) / (a^2 - c^2) = 0.$$

Substitutionen:

$$p = 2ab / (a^2 - c^2), \quad q = (b^2 - c^2) / (a^2 - c^2).$$

Lösung in Kurzform:

$$\text{(d) } \tan^2 \tau + p \tan \tau + q = 0.$$

Zahlen-Beispiel für ein allgemein positioniertes Zifferblatt [1]:

$\varphi = 50^\circ$ (geographische Breite von Frankfurt/M)

$d = -15^\circ$ (Ost-abweichende Südwand)

$i = 110^\circ$ (20° nach vorn überhängend gekippt)

Aus Gleichung (d) folgen bei Sommersonnenwende ($\delta = +23,44^\circ$) die numerischen Ergebnisse

$$\tau_1 = -74,1^\circ \text{ und } \tau_2 = +19,5^\circ.$$

Die Uhr zeigt an diesem Tage die Wahre Ortszeit zwischen 07:04 am Morgen und 13:18 am Nachmittag an. Vorher und nachher (vor allem nachher) funktioniert sie bei rückseitiger Skalierung und durchgehendem Polstab als Norduhr. Aus (2) und (3) folgten $\omega = 75,9^\circ$ und $\Psi = 60,65^\circ$. Die Substitute sind $p = -3,07$ und $q = -1,21$.

An den Äquinoktialtagen ($\delta = 0$) kommt es zur Doppellösung $\tau_{1,2} = +62,9^\circ$.

Zur Wahren Ortszeit 16:12 wechselt die Beleuchtung auf die Rückseite (Norduhr), die noch bis zum Sonnenuntergang 18:00 anzeigt. Am Morgen wird nur die Vorderseite beleuchtet. Sie bekommt bei Sonnenaufgang (genau östlich) bereits Schrägllicht.

Bei Wintersonnenwende ($\delta = -23,44^\circ$) folgen aus Gleichung (d) dieselben Werte für $\tan \tau_{1,2}$ wie am längsten Tag. Es handelt sich aber um die um 180° verschobenen Winkel. Zu diesen Zeitpunkten ist es Nacht, der Horizont blendet die Sonne aus.

Bei der **reinen Süd-/Nord-Uhr** ist die Streiflicht-Gleichung schneller anzugeben.

Im Abschnitt 4.3.1 wurde gefunden:

$$\tan \epsilon = \cot \varphi / \cos \tau.$$

Bei Vorgabe von ϵ_s entsteht für τ der Ausdruck

$$\cos \tau = \cot \epsilon_s / \tan \varphi.$$

Mit $\epsilon_s = (90^\circ - \delta)$ (**Sommersonnenwende**) wird daraus

$$\text{(e) } \cos \tau = \tan \delta / \tan \varphi.$$

Die Gleichung gilt sowohl für Vormittag als auch für Nachmittag ($\cos(\pm \tau) = \cos \tau$).

Die Gleichung in [3], Seite 190 wird mit (e) identisch, nachdem von „zeitlichem Abstand vom Ost- bzw. Westpunkt“ auf „Abstand vom Meridian“ umgeformt ist.

7. Schlussbemerkung

Die Gleichungen (1) bis (5) können auch als Beispiele für abstrakte mathematische Formulierungen mit dem Anspruch der allgemeinen Gültigkeit angesehen werden. Es werden alle 8 Vorzeichen-Kombinationen aus $\pm d$, $\pm i$ und $\pm \tau$ abgedeckt. Ein anschauliches Bild ist aber aus einer solchen abstrakten mathematischen Welt verbannt. Ich habe mir gelegentlich (siehe Abschnitt 4) dennoch eins gemacht, um das Ergebnis am mir Selbstverständlichen zu prüfen. Folge war meine Idee der Streiflichtgleichung mit deren Hilfe die immer drohende Vorzeichenverirrung gemindert werden kann und durch Paar-weises Zusammenfassen von Sonnenuhren ein verkürzter Überblick möglich ist.

Von den Mathematikern unter den Sonnenuhrenfreunden werden solche umfassenden abstrakten Darstellungen als eben so schön empfunden wie ein besonders gelungene Sonnenuhr selbst. Anderen bereitet dieses Vorgehen mitunter Mühe. Sie haben zuerst eine konkrete Uhr vor Augen oder schon in der Hand und bemühen sich erst danach um eine mathematische Hilfe für die quantitative Behandlung. Sie können die strengen, oft fallenreichen Vorzeichen-Konventionen allgemeiner Formulierungen umgehen, weil ihnen klar ist, welche Richtung zum errechneten Zahlenwert gehört.

Das trifft insbesondere auf die symmetrischen Zifferblätter der klassischen Sonnenuhren zu, weshalb es im Abschnitt 4 beim Vergleich mit Formeln aus der Literatur zu Vorzeichenunterschieden kam. Dem Autor [2] und seinen Lesern ist aber die Deutung der Angaben klar. Nur bei der Unsymmetrie der abweichenden Vertikaluhr wird gesagt, was auf die Ost- oder die Westseite des Zifferblattes gehört. So konkret kann praktische Sonnenuhren-Beschäftigung sein, auf eine ausgesprochene Vorzeichenvereinbarung wird verzichtet.

8. Literatur

Januar 2008
Siegfried Wetzel, CH3400 Burgdorf
s.wet@gmx.net

- [1] O. Feustel: „Berechnung der Polos-Sonnenuhr in allgemeiner räumlicher Lage anhand von zwei sphärischen Dreiecken aus vier Grosskreisen“, DGC-Jahresschrift, 2004
- [1a] O. Feustel: „Ergänzende Anmerkungen zum Berechnen der Polos-Sonnenuhr“, DGC-Jahresschrift, 2005
- [2] A. Zenkert : „Faszination Sonnenuhr“, Frankfurt, 2002
- [3] A. Zenkert : „Die Besonnung vertikaler Sonnenuhren“, DGC-Jahresschrift, 2004
- [4] S. Wetzel: „Sonnenuhr und Mathematik“, DGC-Jahresschrift, 1999
- [5] R. Sigl: „Ebene und sphärische Trigonometrie“, Frankfurt, 1969